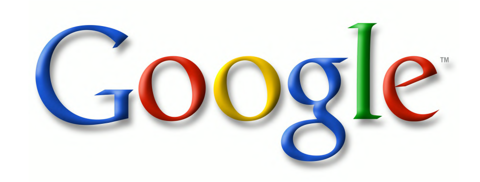
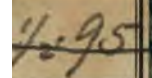
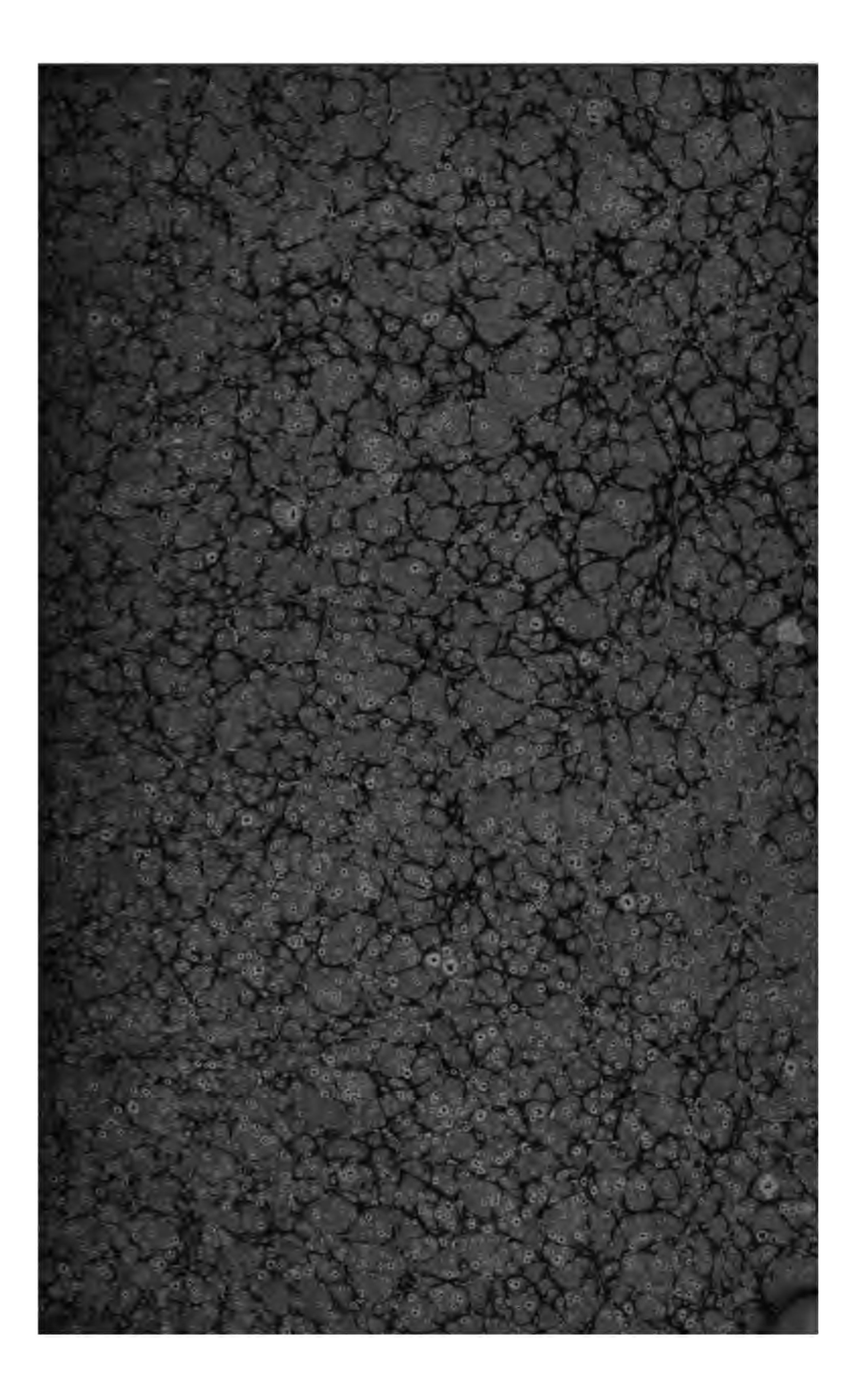







SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



GÉOMÉTRIE DE POSITION

OU

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

PAR

Louis 1822

L. BERTRAND

Professeur agrégé à la Faculté des Sciences et Lettres de Genève.

PREMIÈRE PARTIE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, *successeur de* MALLET-BACHELIER

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1873

GENÈVE. — IMPRIMERIE COOPÉRATIVE, RUE DU CONSEIL-GÉNÉRAL, 8

Pendant le semestre d'hiver 1871-1872, nous avons donné à la Faculté des Sciences et Lettres de Genève, un cours sur la Géométrie synthétique supérieure au point de vue spécial des applications. L'ouvrage dont nous publions aujourd'hui la première partie, est un extrait de nos notes, avec addition de quelques développements sur les relations métriques des figures projectives. La méthode que nous avons suivie est, en général, celle de M. Chasles. De nouveaux termes, il est vrai, ont été parfois employés dans nos leçons; mais ces divergences de détails ne seront point un obstacle pour ceux qui voudront consulter les œuvres de nos géomètres français.

TABLE DES MATIÈRES
DE LA PREMIÈRE PARTIE

(Les articles précédés d'un astérisque peuvent être omis lors d'une première lecture.)

Introduction.

ERRATA

Page 16, ligne 17, au lieu de pass *lisez :* passent.
» » *ligne 18, après* S, *ajoutez :* qui.
» *31, première ligne, au lieu de* (XA) *lisez :* (AX).
» *32, ligne 8, au lieu de* $\frac{p(CB)}{q(AC)}$ *lisez :* $\frac{p(AC)}{q(CB)}$.
» *43, ligne 6, après* valeur, *ajoutez :* qu'ils sont dans un même plan.
» *89, dernière ligne, au lieu de* Tx_1 *lisez :* T_1x_1.
» *125, ligne 6, au lieu de* paints, *lisez :* points.



GÉOMÉTRIE

DE

POSITION

INTRODUCTION.

Caractères de la méthode.

1. Ce qui caractérise essentiellement la géométrie de position, c'est la méthode dont elle fait usage. Cette méthode, que l'on désigne communément sous le nom de *projection centrale*, possède diverses qualités, qui la font particulièrement apprécier en mathématique : elle est simple, parce qu'elle suppose un nombre très-restreint d'éléments liés entre eux d'une manière étroite; elle est générale, parce qu'elle préside à presque toutes les recherches ; de plus, elle est naturelle, parce qu'elle repose sur les lois de la vision ; enfin, elle est pratique, parce qu'elle est à la base de plusieurs sciences d'application, telles que la perspective, la théorie des ombres, la géométrie descriptive, le dessin technique, le calcul par le trait, etc.

De l'infini.

2. Mais pour donner une idée complète de la projection centrale dans toute l'extension dont elle est susceptible, il est auparavant nécessaire d'introduire la notion de l'infini, qui jouera dans notre géométrie un rôle considérable.

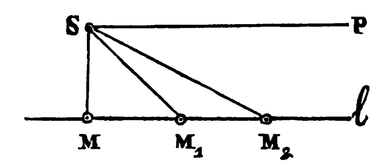
Nous convenons d'appeler *point infini d'une droite, un point tel que sa distance à un autre point quelconque de la même droite soit plus grande que toute longueur donnée.* Il peut donc être envisagé à certains égards comme la limite des positions d'un point mobile qui s'éloigne de plus en plus sur la droite. En vertu de cette définition, le point infini, que nous supposons toujours exister, doit se trouver sur l'une et l'autre des extrémités de la droite; mais nous admettons que ces deux positions déterminent un seul et même point. Les deux extrémités sont ainsi jointes par le point infini; de même en algèbre, les quantités positives et les quantités négatives sont unies par le zéro, qui est à la fois positif et négatif. En outre, le point infini aura pour nous une étendue complètement indéfinie, c'est-à-dire qu'il pourra fort bien ne pas avoir une grandeur nulle, comme les autres points. Cette restriction est indispensable, si nous voulons éviter des conséquences absurdes.

L'ensemble des points infinis de toutes les droites situées dans un plan forme une ligne; celle-ci n'est coupée qu'en un point par une droite arbitraire, puisque dans chaque droite nous supposons un seul point infini. Or, une ligne qui ne peut être rencontrée en plus d'un point par une droite quelconque, à moins de coïncider avec elle, est forcément une ligne droite. Ainsi donc il résulte de notre convention que tous les points infinis d'un plan se trouvent sur une ligne à laquelle nous pouvons donner le nom de *droite infinie du plan.*

La réunion des droites infinies de tous les plans de l'espace constitue une surface; et comme cette surface n'est coupée par un plan arbitraire qu'en une seule droite, à moins de coïncider ensemble, il s'en suit qu'elle est elle-même un plan. Ce sera le *plan infini.*

Parallélisme.

3. Supposons maintenant qu'un point M se meuve sur une droite l et que par chacune de ses positions successives passe un rayon SM tournant autour d'un point S et formant avec une parallèle SP à l un angle MSP. Quand le point



mobile M, M_1, M_2, ... s'éloigne de plus en plus, l'angle correspondant MSP, M_1SP, M_2SP ...... diminue sans cesse et tend à devenir nul. Et puisque nous avons admis un point infini à l'extrémité de l, la droite qui est censée joindre S avec ce point, ne saurait faire avec SP autre chose qu'un angle nul; elle se confond ainsi avec la parallèle. Donc :

Joindre un point S avec le point infini d'une droite l revient à mener par ce point une parallèle SP *à cette droite, et réciproquement deux parallèles peuvent être envisagées comme ayant à l'infini un point commun.*

Comme nous l'avons dit plus haut, le point infini n'a pas forcément une grandeur nulle; on ne sera par conséquent pas autorisé à conclure que la distance de deux parallèles tend vers zéro, quand on la mesure de plus en plus loin.

4. Il est évident que *si l'on joint par des droites différents points* A, B, C, ... *avec le point infini d'une droite l, toutes*

ces lignes seront parallèles à l et réciproquement toutes les lignes parallèles peuvent être regardées comme ayant un même point commun à l'infini.

5. Soient enfin deux plans parallèles. Si dans l'un de ces plans on mène par un point des droites quelconques k, l, m, ... et par un point S de l'autre plan des parallèles k_1, l_1, m_1 à ces droites respectives, les deux lignes k, k_1 auront, conformément à notre convention, un point commun à l'infini; de même l et l_1, etc. Ces points infinis sont tous sur une même droite infinie (v. 2). Nous devrons donc admettre les trois propositions suivantes :

Deux plans parallèles se coupent suivant une droite, qui est la droite infinie de ces plans.

Joindre par un plan un point S *avec la droite infinie d'un plan P revient à mener par* S *un plan parallèle au plan P.*

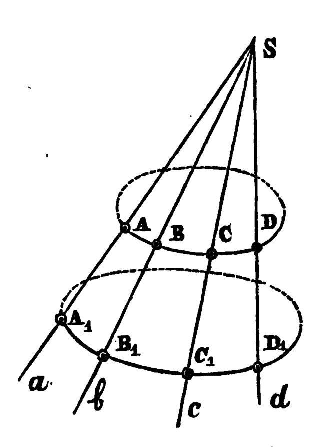
Tous les plans parallèles se coupent suivant une même droite à l'infini.

Projection centrale.

6. Il nous sera maintenant possible d'expliquer ce que nous appelons *projection centrale.*

Soit donnée une figure A B C D.... qui peut consister aussi en un seul point, et soit quelque part un point S que nous appellerons le *centre de perspective.* Joignons S avec A au moyen d'une droite a prolongée à l'infini; cette ligne sera pour nous le *rayon projetant* du point A. Si par un procédé quelconque (en coupant, par exemple, au moyen d'une surface), nous interceptons sur le rayon a un point A_1, nous aurons formé en ce point la *projection* du point A. Après avoir fait la même chose pour les autres points de la figure, nous obtiendrons, en premier lieu, les rayons proje-

tants *a, b, c, d,* .... qui passeront tous par S et dont l'ensemble portera le nom de *cône projetant,* et en second lieu,



les points A_1, B_1, C_1, D_1, ... qui seront la *projection* de la figure A B C D .... Il est évident que les deux groupes A B C D ..... et A_1 B_1 C_1 D_1 .... jouent le même rôle vis-à-vis l'un de l'autre. On peut en effet donner A_1 B_1 C_1 D_1...., et mener du même centre S les rayons projetants *a, b, c, d,* ....; si l'on coupe ces derniers par une surface convenablement choisie, on obtiendra les points A, B, C, D,.... Ainsi donc chacun des groupes peut être considéré comme la projection de l'autre.

D'après ce qui précède, nous voyons qu'à chaque point A d'une figure correspond, en général, un seul rayon *a* du cône projetant et un seul point A_1 de l'autre figure. Nous concevons que les points de la dernière soient désignés une fois pour toutes par les lettres A_1, B_1, C_1, D_1,. .... affectées d'un indice, de sorte que la correspondance soit fixée d'une

manière invariable. Dans la position indiquée plus haut, il y a ce qu'on appelle *perspective*. Ainsi :

Deux figures dont les points correspondent deux à deux comme B *à* B_1, *sont perspectives ou en situation de perspective, lorsque les droites menées par les points correspondants concourent vers un même point* S.

7. Si les deux figures sont ensuite placées dans une position quelconque, sans détruire néanmoins la correspondance des points, c'est-à-dire sans supprimer leur désignation éventuelle par A et A_1, etc., on dit alors que les figures sont *projectives*. Par conséquent :

Deux figures dont tous les points correspondent deux à deux sont projectives, lorsqu'on peut mettre les points correspondants en perspective, en d'autres termes, lorsqu'on peut placer les deux figures de telle manière que les droites menées par les points correspondants concourent vers un même point S.

Lorsque le point S est pris à l'infini, tous les rayons projetants deviennent parallèles; dans ce cas, la projection est appelée spécialement *projection parallèle*.

Éléments.

8. Les éléments dont se sert la géométrie de position, sont au nombre de trois, savoir : *le point, la droite* et *le plan*. Il existe entre eux une étroite connexité, fondée sur la théorie des projections. Si l'on projette, en effet, le point P depuis un centre S, le rayon projetant est une droite *p* et si de nouveau on projette d'un autre centre T tous les points de cette droite, le cône projetant est un plan *P*. Ainsi donc les trois éléments : le point P, la droite *p* et le plan *P* apparaissent dans cette double projection.

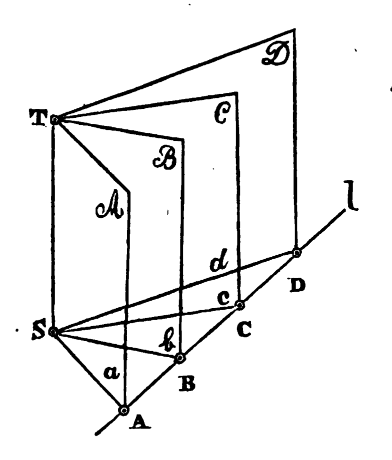
Systèmes primaires.

9. Avec ces éléments nous pourrons former des systèmes. Le plus simple de ces systèmes est l'ensemble de tous les points que renferme une droite *l*, ces points étant considérés les uns indépendamment des autres; nous appellerons cet ensemble une *lignée*. Quelquefois nous aurons à considérer seulement un nombre restreint de points : dans ce cas, nous l'indiquerons en disant, par exemple, la lignée des quatre points A, B, C, D.

Un second système est le *faisceau*. Nous entendons par là l'ensemble des droites ou rayons qu'on peut mener autour d'un point dans un plan.

Enfin, l'ensemble de tous les plans autour d'une droite constitue le troisième système, qui sera désigné par le nom de *feuillée*.

Entre ces trois systèmes primaires, la lignée, le faisceau et la feuillée, il existe la même relation qu'entre les trois éléments. Lorsqu'ils sont projetés d'un premier centre S, les



différents points d'une lignée A, B, C, D, ... donnent naissance à une série de rayons *a*, *b*, *c*, *d* . . c'est-à-dire au faisceau S. Chaque point de la lignée peut être considéré à part; il en est de même pour chaque rayon du faisceau. De plus, à chaque point A de *l* correspond un rayon *a* autour de S. La réciproque est également vraie; car la seule position qui puisse présenter une difficulté est le rayon parallèle à la droite *l*; mais d'après notre convention, ce rayon rencontre *l* à l'infini et par conséquent au rayon parallèle correspond le point infini de la lignée.

Enfin, le faisceau peut être projeté d'un nouveau centre T situé hors de son plan. Chaque rayon *a* donne naissance à un plan *A*, qui contient la droite ST; de même pour tous les autres rayons. On obtient ainsi la série complète des plans qui passent par ST: c'est la feuillée ST.

La lignée, le faisceau et la feuillée, qui sont donc unis entre eux par une double projection, et qui du reste ont un grand nombre de propriétés communes, sont pour cela désignés indistinctement par le nom de ***systèmes primaires***.

10. On peut encore former des systèmes d'ordres plus élevés : il suffit, pour les engendrer, de prendre comme base non pas les points d'une droite, mais les points d'un plan, ou même ceux de l'espace. Toutefois, comme ces systèmes ne se présenteront à nous que beaucoup plus tard, nous n'en donnerons pas actuellement la définition.

Principe de corrélation.

11. C'est ici le lieu de faire une remarque de la plus haute importance. Si dans la définition de la lignée, on remplace le point par la droite et vice-versâ, en ne modifiant rien dans tout ce qui touche au plan, on obtient la définition du fais-

ceau. Cette symétrie peut rendre de grands services; car il est évident que si elle n'est pas détruite dans la suite des raisonnements, toutes les propriétés d'une lignée fourniront, en général, autant de propriétés pour le faisceau. On parvient à ce résultat en permutant dans l'énoncé des propositions démontrées le point avec la droite et la lignée avec le faisceau. Le même procédé est applicable aux grandeurs dont les définitions s'expriment sous une forme symétrique. Ainsi le segment rectiligne, qui est engendré par un point mobile parcourant une droite dans un plan, correspond à l'angle, que décrit une droite tournant autour d'un point dans un plan. Le segment et l'angle sont donc des quantités corrélatives comme la lignée et le faisceau; ils pourront conséquemment être substitués l'un à l'autre dans les mêmes conditions que ces derniers. Remarquons toutefois que rien ne doit être changé au plan, c'est-à-dire que les propriétés du plan, après avoir été traduites suivant les lois de la symétrie, concerneront encore le plan.

Tel est en substance le *principe de corrélation* (de *dualité* ou de *réciprocité) dans le plan.*

12. Un phénomène analogue a pareillement lieu pour l'espace, lorsqu'on permute le point avec le plan, sans rien changer à tout ce qui regarde la droite. En remplaçant, par exemple, dans la définition de la lignée le point par le plan et vice-versâ, on obtient la définition de la feuillée. La même relation existe entre le segment rectiligne et l'angle dièdre; car le premier est engendré par un point parcourant une droite et le second par un plan tournant autour d'une droite. Il y a donc ici symétrie. Il en résulte que nous pourrons traduire les propriétés du plan en propriétés des corps; de là le nom de *principe de corrélation dans l'espace.*

13. Nous allons faire suivre ces considérations de quel-

ques exemples faciles, que nous disposerons en trois colonnes. Des propositions de la première se déduisent d'abord celles de la secoude en permutant le point avec la droite, etc. (d'après le principe de corrélation dans le plan), puis celles de la troisième en permutant le point avec le plan, etc. (d'après le principe de corrélation dans l'espace).

14. Deux points A et B, situés dans un plan, déterminent la position d'une droite, que l'on peut désigner par AB. (C'est la droite qui joint les deux points.)

15. Deux droites a et b, situées dans un plan, déterminent la position d'un point, que l'on peut désigner par ab. (C'est l'intersection des deux droites.)

16. Deux plans A et B, passant par un même point, déterminent la position d'une droite, que l'on peut désigner par AB. (C'est l'intersection des deux plans.)

17. Deux droites qui ont un point commun, sont situées dans un même plan.

18. Deux points qui sont unis par une droite, sont situés dans un même plan.

19. Deux droites qui sont situées dans un même plan, ont un point commun.

20. Un point et une droite déterminent la position d'un plan.

21. Une droite et un point déterminent la position d'un plan.

22. Un plan et une droite déterminent la position d'un point.

23. L'ensemble des points situés dans un plan sur une droite et considérés indépendamment les uns des autres, s'appelle lignée.

24. L'ensemble des droites situées dans un plan autour d'un point et considérées indépendamment les unes des autres, s'appelle faisceau.

25. L'ensemble des plans menés (autour d'un point) par une droite et considérés indépendamment les uns des autres, s'appelle feuillée.

Principe des signes.

26. Un point qui se meut dans un plan sur une droite, engendre un segment rectiligne.

27. Une droite qui se meut dans un plan autour d'un point, engendre un angle plan.

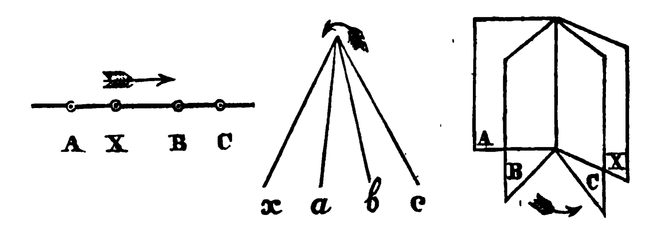
28. Un plan qui se meut autour (d'un point et) d'une droite, engendre un angle dièdre.

29. Tout segment rectiligne qui est décrit par un point partant de A et s'arrêtant en B, sera représenté par (AB); en revanche, (BA) désignera le même seg-

30. Tout angle plan qui est décrit par un rayon partant de la position initiale a et s'arrêtant en b, sera représenté par (ab); en revanche, (ba) désignera

31. Tout angle dièdre qui est décrit par un plan partant de la position initiale A et s'arrêtant en B, sera représenté par (AB); en revanche, (BA) dési-

ment, quand nous le supposerons décrit par



un point qui va de B jusqu'en A.

Comme le mouvement qui engendre un segment, peut avoir lieu dans deux sens, nous regarderons l'un quelconque de ces sens comme positif et l'autre comme négatif. De plus, toute portion de ligne sera considérée comme positive, si elle est engendrée par un point se mouvant dans le sens positif; sinon, elle sera négative. Cette définition revient à dire que la somme de deux mêmes segments parcourus en sens contraires est nulle. Par exemple, si l'on donne comme positif le sens indiqué par la flèche dans la figure, le segment (AB) sera positif, puisqu'il est parcouru dans ce sens, tandis que le segment (BA) sera négatif. En d'autres termes, nous aurons :

$$(AB) + (BA) = 0$$

le même angle, quand nous le supposerons décrit par un rayon qui tourne de *b* jusqu'en *a*.

Comme le mouvement qui engendre un angle, peut avoir lieu dans deux sens, nous regarderons l'un quelconque de ces sens comme positif et l'autre comme négatif. De plus, tout angle sera considéré comme positif, s'il est engendré par un rayon se mouvant dans le sens positif; sinon, il sera négatif. Cette définition revient à dire que la somme de deux mêmes angles parcourus en sens contraires est nulle. Par exemple, si l'on donne comme positif le sens indiqué par la flèche dans la figure, l'angle *(ab)* sera positif, puisqu'il est décrit dans ce sens, tandis que l'angle *(ba)* sera négatif.

En d'autres termes, nous aurons :

$$(ab) + (ba) = 0$$

gnera le même angle, quand nous le supposerons décrit par un plan qui tourne de *B* jusqu'en *A*.

Comme le mouvement qui engendre un angle peut avoir lieu dans deux sens, nous regarderons l'un quelconque de ces sens comme positif et l'autre comme négatif. De plus, tout angle sera considéré comme positif, s'il est engendré par un plan se mouvant dans le sens positif; sinon, il sera négatif. Cette définition revient à dire que la somme de deux mêmes angles parcourus en sens contraires est nulle. Par exemple, si l'on donne comme positif le sens indiqué par la flèche dans la figure, l'angle *(AB)* sera positif, puisqu'il est décrit dans ce sens. tandis que l'angle *(BA)* sera négatif. En d'autres termes, nous aurons :

$$(AB)+(BA) = 0$$

ou

(AB) = — (BA)

quel que soit le sens regardé comme positif.

32. Il résulte de cette convention que

Trois points A, B, C, situés sur une droite (dans un plan) donnent toujours lieu à l'égalité:

(AB)+(BC) = (AC).

En effet, si les points sont dans l'ordre A, B, C, les segments (AB), (BC), (AC) sont tous de même signe ; donc on en conclut la relation

(AB)+(BC) = (AC) :

or, comme la longueur (AC) peut être remplacée par —(CA), cette égalité s'écrit encore sous la forme

(AB)+(BC)+(CA) = 0,

qui est symétrique par rapport aux trois lettres, et reste conséquemment indépendante de la position respective des trois points. Par exemple, si ces derniers sont dans l'ordre C, A, B, il suffit de substituer dans la démonstration précédente C à la place de A, puis A la place de B, enfin B à la place de C, de sorte que la dernière égalité devient pour ce cas :

(CA)+(AB)+(BC) = 0,

c'est-à-dire

(AB)+(BC) = (AC).

La relation est ainsi démontrée pour toutes les hypothèses possibles.

ou

(ab) = — *(ba)*

quel que soit le sens regardé comme positif.

33. Il résulte de cette convention que

Trois rayons *a, b, c,* situés autour d'un point (dans un plan), donnent toujours lieu à l'égalité:

(ab)+*(bc)* = *(ac)*

En effet, si les rayons sont dans l'ordre *a, b, c,* les angles *(ab)*, *(bc)*, *(ac)* sont tous de même signe ; donc on en conclut la relation

(ab)+*(bc)* = *(ac)*;

or, comme l'angle *(ac)* peut être remplacé par —*(ca)*, cette égalité s'écrit encore sous la forme

(ab)+*(bc)*+*(ca)* = 0,

qui est symétrique par rapport aux trois lettres, et reste conséquemment indépendante de la position respective des trois rayons. Par exemple, si ces derniers sont dans l'ordre *c, a, b,* il suffit de substituer dans la démonstration précédente *c* à la place de *a*, puis *a* à la place de *b*, enfin *b* à la place de *c*, de sorte que la dernière égalité devient pour ce cas

(ca)+*(ab)*+*(bc)* = 0,

c'est-à-dire

(ab)+*(bc)* = *(ac)*.

La relation est ainsi démontrée pour toutes les hypothèses possibles.

ou

(AB) = — *(BA)*

quel que soit le sens regardé comme positif.

34. Il résulte de cette convention que

Trois plans *A, B, C,* passant par une droite (autour d'un point) donnent toujours lieu à l'égalité :

(AB)+*(BC)* = *(AC)*.

En effet, si les plans sont dans l'ordre *A, B, C,* les angles *(AB)*, *(BC)*, *(AC)* sont tous de même signe ; donc on en conclut la relation

(AB)+*(BC)* = *(AC)*;

or, comme l'angle *(AC)* peut être remplacé par —*(CA)*, cette égalité s'écrit encore sous la forme

(AB)+*(BC)*+*(CA)* = 0,

qui est symétrique par rapport aux trois lettres, et reste conséquemment indépendante de la position des trois plans. Par exemple, si ces derniers sont dans l'ordre *C, A, B,* il suffit de substituer dans la démonstration précédente *C* à la place de *A*, puis *A* à la place de *B*, enfin *B* à la place de *C*, de sorte que la dernière égalité devient pour ce cas

(CA)+*(AB)*+*(BC)* = 0,

c'est-à-dire

(AB) + *(BC)* = *(AC)*.

La relation est ainsi démontrée pour toutes les hypothèses possibles.

Les trois théorèmes précédents peuvent s'énoncer d'une manière générale comme suit :

Trois éléments **a**, **b**, **c** d'un système primaire donnent toujours lieu à l'égalité

$$(\mathbf{ab}) + (\mathbf{bc}) = (\mathbf{ac}) \qquad (1)$$

Propriétés projectives.

35. Parmi les propriétés qui existent entre les différents éléments d'une figure, les unes ne s'appliquent pas aux éléments correspondants des projections de cette figure; les autres, en revanche, restent intactes et parce qu'elles ne sont pas détruites par la projection, elles sont qualifiées de *projectives*.

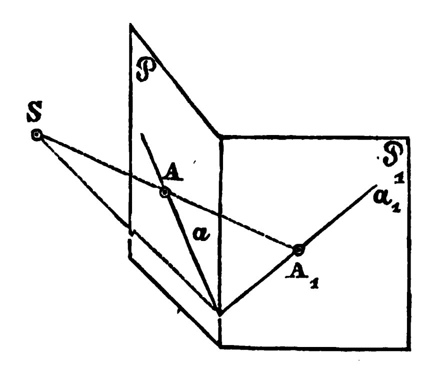
En général, lorsque des relations entre certains éléments d'une figure se laissent exprimer au moyen des rayons respectifs du cône projetant, ou en dépendent directement, ces relations sont encore vraies pour les éléments correspondants d'une projection quelconque, et doivent en conséquence être regardées comme des propriétés projectives. Par exemple, quand un point est l'intersection de deux lignes dans la première figure, le point correspondant sera de même l'intersection des deux lignes correspondantes dans la projection.

Puisque les propriétés en question sont communes, nous pourrons les étudier dans celle des projections qui nous permettra de les déduire avec le plus de facilité. C'est ainsi que nous trouverons dans la seule considération du cercle les théorèmes fondamentaux des sections coniques.

Il est évident que, d'un côté, la nature des surfaces sur lesquelles les figures sont situées, et de l'autre, la position du centre de perspective influent sur le nombre et l'étendue de ces propriétés constantes. Lorsqu'il s'agit de plans, comme c'est généralement le cas dans la suite de cet ouvrage, la méthode projective revêt un caractère tout spécial et suffit

par elle-même à nous donner une connaissance assez complète des figures planes.

36. Si l'on donne un plan *P*, dans lequel se trouve une droite *a* et si l'on veut, d'un centre de perspective S situé hors de *P*, projeter cette droite sur un autre plan P_1, le cône



projetant de *a* sera nécessairement un plan, d'où résulte que la projection a_1 est elle-même une ligne droite. En outre, le point où *a* rencontre l'arête des deux plans *P*, P_1, est en même temps sa projection, et se trouve conséquemment sur a_1. Donc les deux droites correspondantes *a* et a_1 se coupent sur l'arête PP_1, qu'on appelle *axe de perspective*. Cette ligne doit son nom à une certaine affinité qu'elle possède avec le centre de perspective S; en effet,

Lorsque deux figures planes sont en situation de perspective, les droites qui joignent les points correspondants A, A_1 pass toutes par un même point S, est le centre de perspective.	Lorsque deux figures planes sont en situation de perspective, les points d'intersection de deux droites correspondantes *a*, a_1 sont tous situés sur une même droite, qui est l'axe de perspective.

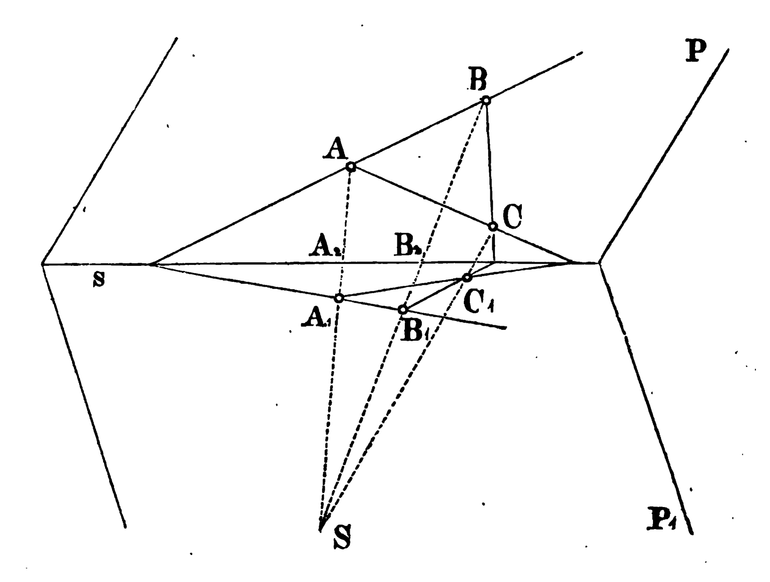
Le centre et l'axe de perspective sont ainsi reliés entre eux par la même symétrie que la lignée et le faisceau; ils peuvent donc être permutés l'un avec l'autre, toutes les fois qu'on applique le principe de corrélation.

Il résulte de ce qui précède la proposition suivante :

Lorsque deux figures dont tous les points se correspondent deux à deux comme A, B,.. *à* A_1, B_1.. *sont planes et perspectives, les droites correspondantes* AB, A_1B_1 *se coupent sur l'axe de perspective.*

37. Réciproquement, *lorsque deux figures dont tous les points se correspondent deux à deux comme* A, B,.. *à* A_1, B_1.., *sont placées de telle manière qu'une droite* AB *joignant deux points quelconques d'une figure et la droite* A_1B_1 *menée par les points correspondants se coupent sur une droite s, ces deux figures sont planes et perspectives.*

Remarquons d'abord qu'à une droite dans une figure correspond une droite dans l'autre. En effet, si un point D est



situé sur la droite AB, son correspondant D_1 est sur la droite A_1B_1 et vice-versâ, puisque AD et A_1D_1 doivent se rencontrer sur *s*, de même que AB et A_1B_1.

En outre, les deux figures proposées sont planes; car tout point C de la première est dans le plan des deux droites AB et s, vu que, d'après l'hypothèse, AC rencontre s; pour un motif semblable, tout point C_1 de la seconde est dans le plan des deux droites A_1B_1 et s.

Il reste à démontrer que les deux figures sont perspectives. Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. Les deux figures ne sont pas situées dans un même plan.

Les droites AA_1, BB_1 sont dans le plan mené par AB et A_1B_1; elles doivent donc se rencontrer quelque part en un point S. Si l'on prend hors de AB un autre point C et son correspondant C_1, on démontre que pour une raison semblable les droites AA_1 et CC_1 se couperont en un point; il en est de même pour BB_1 et CC_1. Or, les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se rencontrant deux à deux et n'étant pas situées dans un plan, convergent forcément vers un seul et unique point S.

Si l'on donne donc deux points correspondants quelconques, on prouve comme ci-dessus que la droite menée par ces points doit rencontrer deux des trois droites AA_1, BB_1, CC_1 en leur point de concours S.

Second cas. Les figures sont dans un même plan.

Soient encore A, A_1 et B, B_1 deux paires de points correspondants; soit A_2 le point d'intersection de AA_1 avec s. La droite correspondante de AA_2 doit rencontrer celle-ci sur s, donc en A_2 et ensuite passer par le point A_1 correspondant de A; ainsi A_2A_1 correspond à A_2A. Nous en pouvons dire autant de B_2B_1 et B_2B. Les deux droites A_2A, B_2B se rencontrent quelque part en un point S. Puisque S appartient à A_2A et à B_2B, son point correspondant doit être à la fois sur A_2A_1 et sur B_2B_1; en d'autres termes, S est en même

temps son point correspondant. Dès lors, si l'on prend une troisième paire quelconque de points correspondants C, C_1, on prouve que CC_1 passe par S en observant que les droites SC, SC_1 se correspondent et doivent avoir en outre d'après l'hypothèse un même point commun sur *s*.

Les deux figures sont donc en perspective; la droite *s* est l'*axe de perspective*.

Une conséquence très-remarquable de ce théorème est que si l'un des plans tourne autour de l'axe *s*, les deux figures restent en perspective dans chaque position. Mais nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

38*. *Lorsque deux figures (ou surfaces) dont tous les points se correspondent deux à deux comme* A, B, C.. *à* A_1, B_1, C_1.. *sont perspectives et que tout plan* ABC, *mené par trois points de l'une, a pour projection le plan* $A_1B_1C_1$ *mené par les points correspondants de l'autre, il faut que ces plans correspondants se coupent toujours dans un même plan S.*

En effet, tous les points de l'intersection de deux plans correspondants et seulement ces points ont la propriété de coïncider avec leur projection. L'intersection de deux plans correspondants ne saurait donc rencontrer deux autres plans correspondants ailleurs qu'en un point de leur intersection, sinon elle les rencontrerait en des points qui ne coïncideraient pas chacun avec leur projection respective. Ainsi toutes les intersections se coupent mutuellement et sont en conséquence situées dans un même plan *S*.

Puisqu'un plan a pour projection un plan, il en résulte qu'une droite a pour projection une droite, et que deux droites correspondantes se coupent dans le plan *S*.

39*. *Lorsque deux figures (ou surfaces) dont tous les points se correspondent deux à deux comme* A, B, C.., *à* A_1, B_1, C_1..,

sont placées de telle manière qu'un plan ABC, *mené par trois points quelconques d'une figure et le plan* $A_1B_1C_1$ *mené par les points correspondants se coupent dans un même plan S, ces deux figures sont perspectives.*

Nous pouvons montrer en premier lieu qu'aux différents points d'un plan ABC mené par trois points d'une figure correspondent les points du plan $A_1B_1C_1$ mené par les trois points correspondants de l'autre; car à tout point D du plan ABC doit correspondre un point D_1 situé dans le plan $A_1B_1C_1$ et vice-versâ, puisque, en vertu de l'hypothèse, les plans ABD ou ABC et $A_1B_1D_1$ doivent se couper en S, de même que les plans ABC et $A_1B_1C_1$.

Si par les droites correspondantes AB, A_1B_1 on mène deux plans correspondants, ceux-ci, d'après l'hypothèse, auront avec *S* une même intersection, que devront couper AB et A_1B_1. En menant par ces dernières lignes, deux autres plans correspondants, on verrait pareillement que AB et A_1B_1 rencontrent la nouvelle intersection commune.

Donc AB et A_1B_1 passent nécessairement par le point commun de ces deux intersections; en d'autres termes, les droites correspondantes AB et A_1B_1 se coupent dans le plan *S*.

Cela posé, un raisonnement analogue à celui du premier cas dans le théorème 37 démontre que les deux surfaces sont en perspective.

40. Il n'est pas hors de propos de faire observer que dans les quatre derniers théorèmes de cet article se présente un genre particulier de figures projectives : aux parties planes correspondent constamment des parties planes. C'est là ce que nous pouvons appeler la *projection simple;* et dorénavant nous supposerons toujours les figures projectives engendrées dans ces conditions.

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES

DES

SYSTÈMES PRIMAIRES DE QUATRE ÉLÉMENTS

Rapport de simple section.

41. Lorsque dans une lignée l on donne deux éléments (points) A et B, un troisième X divise la longueur (AB) en

A X B

deux parties (AX), (XB), dont la première s'étend depuis l'origine A jusqu'au point de section X et la seconde depuis ce point X jusqu'à la fin B. L'élément X peut être à l'intérieur ou à l'extérieur de (AB), mais quelle que soit sa position relative et quel que soit le sens de la droite regardé comme positif, la somme des deux segments (AX)+(XB) sera toujours égale à la longueur (AB) (v. 32).

Le quotient $\frac{(AX)}{(XB)}$ du premier segment par le second est ce qu'on appelle *le rapport de simple section de la longueur* (AB) *par le point* X, ou bien encore *le rapport de simple section des deux éléments* A, B *par l'élément* X.

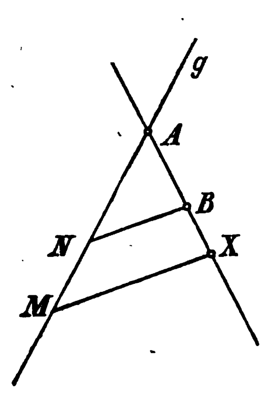
La valeur de ce rapport est indépendante du sens de la droite; car, en admettant comme positif le sens contraire à celui qu'on pouvait avoir choisi primitivement, on change le

signe des deux parties (AX), (XB), mais on ne modifie point celui du quotient $\frac{(AX)}{(XB)}$.

Si le point X est à l'intérieur de (AB), les deux segments ont toujours le même sens, le rapport est alors positif ; en revanche, il est négatif, quand X est hors de (AB), puisque les deux segments ont dans ce cas des signes différents.

Remarquons en outre qu'*à une position donnée de* X *correspond une seule et unique valeur pour le rapport* $\frac{(AX)}{(XB)}$; cela résulte évidemment de la forme de cette expression. De même, *il existe toujours un seul point* X *tel que le rapport de simple section de la longueur* (AB) *par ce point soit égal à une quantité réelle donnée* $\frac{m}{n}$.

Construisons d'abord ce point. Sur une droite quelconque g passant par A, on fait le segment (AM) égal à m, puis on



porte une longueur (MN) égale à n dans le même sens que (AM) ou dans le sens inverse suivant que n a un signe sem-

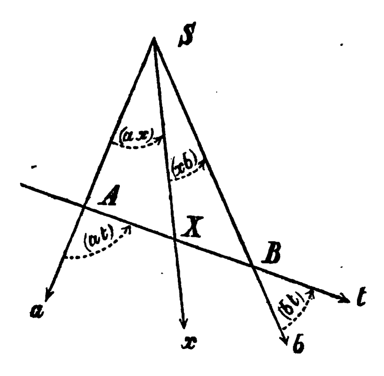
blable ou contraire à celui de m. La parallèle menée par M à BN coupe la droite AB au point cherché X. De la similitude des deux triangles formés on déduit en effet

$$\frac{(AX)}{(XB)} = \frac{(AM)}{(MN)} = \frac{m}{n}.$$

Donc il y a toujours un point X qui satisfait à la condition posée. En second lieu, il ne peut en exister un second X_1; car MX_1 n'étant pas parallèle à BN, l'égalité ci-dessus n'est plus vérifiée.

42. Dans les faisceaux et dans les feuillées, nous considérerons seulement les angles qui ne sont pas supérieurs à deux droits. Cette restriction a pour but de simplifier le raisonnement.

Un angle (ab), que forment deux rayons a, b d'un faisceau, est divisé par un rayon quelconque x en deux parties (ax), (xb), dont la somme (v. 33.) est toujours égale à (ab). Le quotient des sinus, savoir : $\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)}$ est ce que nous appelons *le rapport de simple section de l'angle* (ab) *par le rayon* x, ou bien encore *le rapport de simple section des deux éléments* a, b *par l'élément* x.



La valeur du rapport $\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)}$ est indépendante du sens du mouvement rotatoire; car si l'on admet comme positif le sens contraire à celui qu'on pouvait avoir choisi en premier lieu, les deux angles (ax), (xb) changent de signe; il en est de même des sinus; mais le rapport en question n'est point modifié.

Lorsque x est à l'intérieur de (ab), les deux angles (ax), (xb) ont toujours même signe, et comme d'après l'hypothèse ils sont chacun moindres que deux droits, leurs sinus ont des signes semblables et par conséquent le rapport de simple section est toujours positif. Mais lorsque x est à l'extérieur de (ab), les angles et par conséquent leurs sinus ont des signes différents; d'où il résulte que dans ce cas le rapport est négatif.

43. Pour étudier la nature de ce rapport $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$, menons une transversale t, qui coupera le faisceau a,b,x respectivement en A,B,X, et admettons comme sens positif : 1° dans tout rayon le sens du sommet S à l'extrémité du rayon proprement dit et non de son prolongement, 2° dans la ligne t l'un quelconque des deux sens, par exemple le sens de A vers B, 3° pour les angles, formés tous par les directions positives des droites, un sens quelconque, tel que le sens de a vers b. Avec ces conventions on peut démontrer que l'égalité

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin(at)}{\sin(bt)} \qquad \text{(II)}$$

existe dans tous les cas possibles.

Premier cas. La transversale t rencontre les rayons a,b,x et non leurs prolongements.

La trigonométrie enseigne que dans tout triangle le rapport de deux sinus est égal en valeur absolue au rapport des côtés opposés. Donc on a

$$\frac{\sin ASX}{\sin SAX} = \frac{(AX)}{(SX)}$$

$$\frac{\sin XSB}{\sin SBX} = \frac{(XB)}{(SX)};$$

en divisant ces deux égalités membre par membre, on obtient

$$\frac{\sin ASX}{\sin XSB} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin SAX}{\sin SBX}$$

ou ce qui est la même chose

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin(at)}{\sin(bt)}.$$

Cette égalité est vraie d'une manière absolue; il reste à démontrer qu'elle est pareillement vraie, si l'on tient compte des signes. Or, le facteur $\frac{\sin(at)}{\sin(bt)}$ a dans notre hypothèse une valeur positive, puisque chacun des angles est positif et moindre que deux droits; d'un autre côté, quand x est à l'intérieur de (ab), les rapports $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$ et $\frac{(AX)}{(XB)}$ sont positifs, et quand x est à l'extérieur de (ab), ils sont négatifs. Donc les deux membres de l'égalité ont le même signe, ce qu'il fallait démontrer.

Second cas. La transversale t rencontre un ou plusieurs des rayons dans le prolongement.

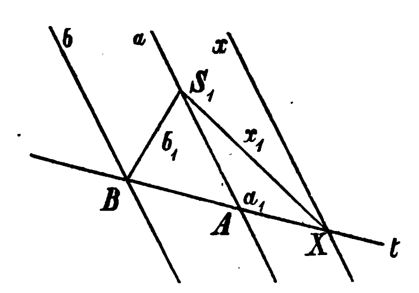
Si t coupe le prolongement de a, il suffit d'augmenter de

180 degrés chacun des angles (ax), (at) du premier cas. L'égalité est vraie d'une manière absolue, ce qui est évident; elle l'est encore en tenant compte des signes, puisque $\sin(ax)$ et $\sin(at)$ changent simultanément le leur.

La même observation s'applique au rayon b.

Enfin, quand t rencontre le prolongement de x on augmentera les angles (ax) et (xb) de 180 degrés; les sinus changent de signe à la fois et l'égalité se trouve maintenue. Donc en général le rayon x et son prolongement partagent un angle donné dans un même rapport.

Troisième cas. Le sommet S est à l'infini, et par conséquent les rayons a,b,x sont parallèles.



Si sur l'un des rayons a on prend un point S_1, et qu'on le joigne par les droites a_1,b_1,x_1, aux intersections A,B,X, on aura toujours

$$\frac{\sin(a_1x_1)}{\sin(x_1b_1)}=\frac{(AX)}{(XB)}\cdot\frac{\sin(a_1t)}{\sin(b_1t)}$$

Lorsque le point S_1 s'éloigne de plus en plus sur a, le second membre tend vers une limite déterminée $\frac{(AX)}{(XB)}\cdot\frac{\sin(at)}{\sin(bt)}$,

que nous appelons le rapport de simple section de (ab) par x, et que nous représentons par $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$.

Donc on a

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin(at)}{\sin(bt)}$$

et cette dernière relation est ainsi démontrée pour toutes les hypothèses admissibles.

44. Si l'angle (ab) est donné et que le rayon x décrive tout le plan en tournant autour du sommet, il arrivera qu'*à chacune des positions de x correspond une seule et unique valeur pour le rapport* $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$; c'est ce qui ressort immédiatement de la nature de cette expression.

Réciproquement *un angle (ab) étant donné, il existe une seule et unique position de x (y compris le prolongement) telle que le rapport* $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$ *soit égal à une quanté réelle* $\frac{m}{n}$.

En effet, après avoir coupé par une transversale t les rayons a,b,x respectivement dans les points A,B,X, on doit avoir

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin(at)}{\sin(bt)}.$$

Il faudra donc déterminer sur la ligne t un point X qui satisfasse à la condition

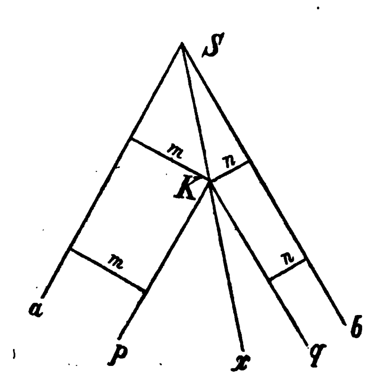
$$\frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\sin(at)}{\sin(bt)} = \frac{m}{n}$$

ou

$$\frac{(AX)}{(XB)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin(bt)}{\sin(at)}$$

Le problème revient donc à diviser la longueur (AB) dans un rapport de simple section égal au dernier membre. Or on trouvera un seul et unique point X, par lequel on fera passer le rayon cherché x.

On peut aussi employer la construction suivante : on mène à la droite a une parallèle p distante de m et à b une parallèle q distante de n, en ayant soin qu'elles soient portées toutes les deux à l'intérieur de (ab) si $\frac{m}{n}$ est positif, sinon l'une en



dedans l'autre en dehors. Le point de rencontre K des deux parallèles est sur le rayon cherché x; car on a

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = \frac{\left(\frac{m}{\mathrm{SK}}\right)}{\left(\frac{n}{\mathrm{SK}}\right)} = \frac{m}{n},$$

les signes des deux membres étant du reste égaux par suite de la construction.

45*. Tout angle dièdre (AB) d'une feuillée sera divisé par

un plan X de la même feuillée en deux parties (AX), (XB), dont la somme sera toujours égale à (AB). L'expression $\frac{\sin(AX)}{\sin(XB)}$ sera le rapport de simple section de l'angle (AB) par le plan X ou bien encore le rapport de simple section des deux éléments A,B par un troisième élément X.

Comme les angles dièdres ont pour mesure les angles correspondants formés par les intersections a,b,x d'un plan perpendiculaire à l'arête commune, on aura

$$\frac{\sin(AX)}{\sin(XB)} = \frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$$

de sorte que toutes les propriétés du rapport de simple section dans le faisceau s'appliquent également à la feuillée.

46. Les résultats principaux de cet article peuvent se résumer ainsi :

Lorsque deux éléments **a**,**b** d'un système primaire sont donnés, à toute position **x** d'un troisième élément correspond une seule et unique valeur du rapport de simple section des éléments **a** et **b** par **x** ; et réciproquement lorsque **a** et **b** sont donnés, il existe une seule et unique position de **x** tel que le même rapport de simple section soit égal à une quantité réelle proposée.

Rapport de double section ou biquotient.

47. Nous avons vu qu'une longueur (AB) est partagée par un point X de la même droite dans le rapport de simple section $\frac{(AX)}{(XB)}$. Grâce à un nouveau point de division C on obtient

un rapport analogue $\frac{(AC)}{(CB)}$. Le quotient $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$ de ces deux expressions est ce qu'on appelle *le rapport de double section de la longueur* (AB) *par les points* X *et* C, ou plus simple-

X A C B

ment *le biquotient des points* A,X,C,B. Nous représenterons sa valeur par le symbole (AXCB), qui possède un double avantage : car, en premier lieu, il a le même ordre de lettres que le numérateur de la fraction $\frac{(AX).(CB)}{(AC).(XB)}$ égale au biquotient $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$; en second lieu, il montre intuitivement par la disposition de ses lettres que la longueur (AB) est partagée d'abord par X, ensuite par C.

Quatre points A,X,C,B étant donnés sur une lignée, on peut former avec eux vingt-quatre rapports de double section, en substituant deux lettres l'une à l'autre, par exemple, B à C et vice-versâ, dans l'expression $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$. Mais trois des biquotients ainsi obtenus sont égaux à ce dernier; en effet, on a

$$\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)} = \frac{(XA)}{(AC)} : \frac{(XB)}{(BC)} = \frac{(CB)}{(BX)} : \frac{(CA)}{(AX)} = \frac{(BC)}{(CA)} : \frac{(BX)}{(XA)}$$

puisque toutes ces expressions se réduisent à $\frac{(AX).(CB)}{(AC).(XB)}$ si

l'on observe qu'un segment quelconque (XA) peut être remplacé par — (XA). Les dernières égalités s'écrivent au moyen des symboles comme suit :

$$(AXCB) = (XABC) = (CBAX) = (BCXA)$$

Du premier membre se déduisent les trois autres, savoir : (XABC) en permutant A avec la deuxième lettre X, et C avec B; puis (CBAX) en permutant A avec la troisième lettre C et X avec B; enfin (BCXA) en permutant A avec la quatrième lettre B et X avec C. Les différentes permutations possibles sont donc permises; on en conclut le théorème suivant :

Un biquotient ne change pas de valeur quand on permute toutes les lettres deux à deux.

Ce théorème permet d'amener l'une quelconque des quatre lettres à la place qu'on désire, sans modifier toutefois la valeur du rapport de double section. Par exemple, si l'on veut au lieu de (AXCB) avoir C en tête, on permutera C avec A et les deux autres lettres ensemble.

48. Un simple coup d'œil jeté sur la forme de l'expression $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$ montre qu'un biquotient est indépendant du sens de la droite, car si l'on regarde comme positif le sens contraire à celui qu'on a d'abord choisi, les segments (AX), (XB), (AC), (CB), changent de signe, mais cela ne modifie nullement la valeur de $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$.

Supposons que de quatre points A, B, C, X sur une droite les trois premiers soient fixes et que le quatrième X décrive la ligne entière. Le biquotient (AXCB), c'est-à-dire $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$ sera égal à un rapport de simple section $\frac{(AX)}{(XB)}$ divisé par la

quantité invariable $\frac{(AC)}{(CB)}$; et comme le rapport de simple section a pour chaque position de X une seule et unique valeur, il en sera de même pour le biquotient. Réciproquement, si l'on donne les points A, B, C, et qu'il s'agisse d'en trouver un quatrième X, tel que le biquotient $\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)}$ soit égal à une quantité réelle $\frac{p}{q}$, il existera toujours un seul et unique point qui satisfasse à cette condition. On doit avoir en effet

$$\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)} = \frac{p}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{(AX)}{(XB)} = \frac{p(CB)}{q(AC)}$$

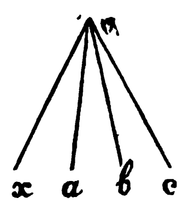
or il n'y a qu'un point X qui partage la longueur (AB) d'après le rapport connu $\frac{p(CB)}{q(AC)}$. La construction de X peut s'effectuer par le procédé vu plus haut (v. 41.).

Parmi les biquotients que l'on peut former avec les quatre lettres A, B, C, X, nous avons considéré seulement (AXCB); mais les propriétés qui viennent d'être démontrées pour ce dernier, s'appliquent à tous les autres; car on pourra toujours amener par des permutations la lettre variable à la seconde place. Ainsi :

Trois points A, B, C *d'une droite étant donnés, il existe toujours sur la même ligne un seul et unique point* X *tel qu'un certain biquotient formé par ces quatre points soit égal à une quantité réelle proposée.*

49. L'angle (ab) que forment deux rayons a, b d'un faisceau, est divisé par un troisième x dans le rapport de simple section $\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)}$ et par un quatrième c dans le rapport $\frac{\text{Sin}(ac)}{\text{Sin}(cb)}$. L'expression $\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)} : \frac{\text{Sin}(ac)}{\text{Sin}(cb)}$ est ce que nous

appellerons le rapport de double section de l'angle *(ab)* par les rayons x et c ou plus simplement le biquotient de



a, x, c, b ; sa valeur sera représentée par le symbole *(axcb)*.

50*. Une définition analogue peut être adoptée à l'égard de la feuillée. Le biquotient des quatre plans *A, X, C, B* sera donc le rapport $\frac{\text{Sin}(AX)}{\text{Sin}(XB)} : \frac{\text{Sin}(AC)}{\text{Sin}(CB)}$, que nous désignerons par *(AXCB)*.

Comme les angles dièdres de la feuillée ont pour mesure les angles plans formés par ses intersections *a, x, c, b* avec un plan perpendiculaire à l'arête commune, le rapport de double section

$\frac{\text{Sin}(AX)}{\text{Sin}(XB)} : \frac{\text{Sin}(AC)}{\text{Sin}(CB)}$ est évidemment égal à $\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)} : \frac{\text{Sin}(ac)}{\text{Sin}(cb)}$; en d'autres mots (*AXCB*) est l'équivalent de (*axcb*).

51. Les propriétés du biquotient, démontrées pour quatre points d'une lignée, s'appliquent par analogie à quatre rayons d'un faisceau et à quatre plans d'une feuillée. Elles peuvent en conséquence être énoncées d'une manière générale comme suit :

Le biquotient (**axcb**) *de quatre éléments* **a, x, c, b** *d'un système primaire ne dépend en aucune façon du sens dans lequel le système est engendré.*

52. *Le biquotient* (**axcb**) *ne peut avoir qu'une seule et unique valeur.*

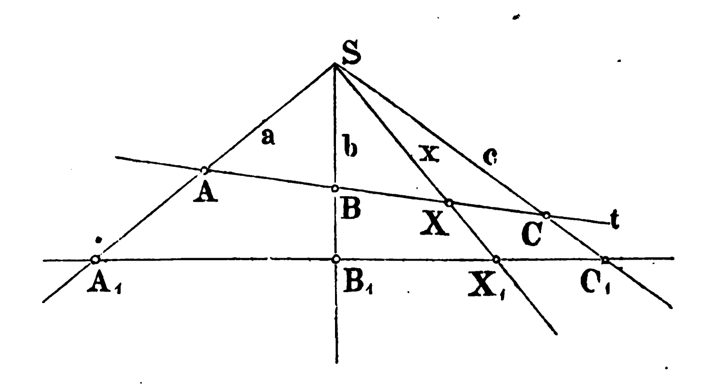
53. *Un biquotient ne change point, lorsqu'on permute tous les éléments deux à deux.*

54. *Si trois éléments sont donnés, il existe toujours un seul et unique quatrième élément tel qu'un certain biquotient de ces quatre éléments soit égal à une quantité réelle proposée.*

Propriété projective du biquotient.

55. Théorème. *Lorsqu'une droite coupe un faisceau de quatre éléments, tout biquotient formé avec les intersections de la droite est égal au biquotient analogue du faisceau.*

Soient a, b, c, x les rayons donnés et A, B, C, X leurs



intersections avec une transversale t; il s'agit de démontrer, par exemple, que le biquotient (AXCB) est égal à $(axcb)$.

Or, on a toujours (v. 43)

$$\frac{\operatorname{Sin}(ax)}{\operatorname{Sin}(xb)} = \frac{(AX)}{(XB)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(at)}{\operatorname{Sin}(bt)}$$

et de même

$$\frac{\operatorname{Sin}(ac)}{\operatorname{Sin}(cb)} = \frac{(AC)}{(CB)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(at)}{\operatorname{Sin}(bt)};$$

en divisant ces deux égalités membre par membre, on obtient

$$\frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)} = \frac{\operatorname{Sin}(ax)}{\operatorname{Sin}(xb)} : \frac{\operatorname{Sin}(ac)}{\operatorname{Sin}(cb)},$$

ce qu'il fallait prouver.

56. Corollaire. Les quatre points A, B, C, X sont projetés du centre S au moyen des rayons a, b, c, x. Comme le biquotient est, en vertu du dernier théorème, susceptible d'être exprimé au moyen des rayons correspondants, il donne naissance à une propriété projective (v. 35) et doit être invariable pour toutes les projections des quatre points A, B, C, X. En effet, si l'on coupe le faisceau par une droite ou un plan, l'intersection A_1 sera la projection de A depuis le centre de perspective S; de même B_1, C_1, X_1, seront les projections de B, C, X. Or, les deux expressions (AXCB) et $(A_1X_1C_1B_1)$ seront l'une et l'autre égales à $(axcb)$ et par conséquent égales entre elles. Donc :

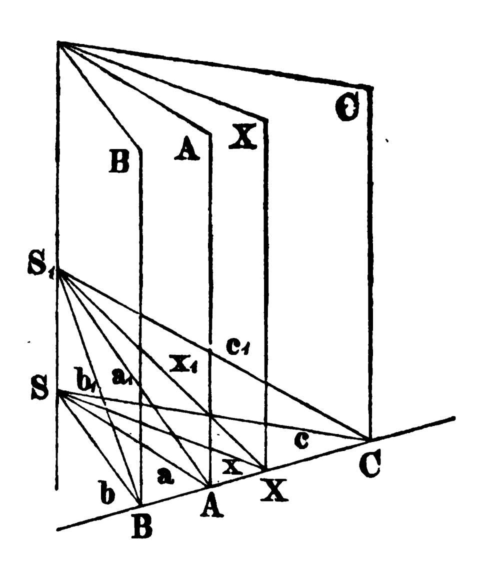
La valeur d'un biquotient de quatre points reste la même, quand on remplace ces points par leurs projections sur une droite ou sur un plan.

57*. Théorème. *Lorsqu'un plan coupe une feuillée de quatre éléments, tout biquotient formé avec les intersections du plan est égal au biquotient analogue de la feuillée.*

Soient A, B, C, X les plans de la feuillée, et a_1, b_1, c_1, x_1 les intersections de cette feuillée par le plan donné P_1.

Menons un plan P perpendiculaire à l'arête, et désignons par A, B, C, X les points où la droite PP_1 rencontre les différents plans de la feuillée. Il s'agit de montrer que tout biquo-

tient $(a_1\ x_1\ c_1\ b_1)$ est égal au biquotient analogue $(AXCB)$.



Or $(AXCB) = (axcb)$ (v. 50)

$(axcb) = (\mathrm{AXCB})$ (v. 55)

$(\mathrm{AXCB}) = (a_1x_1c_1b_1)$ (v. 55)

Donc $(a_1x_1c_1b_1) = (AXCB)$.

58*. Corollaire. Nous tirons de ce théorème une conséquence semblable à celle que nous avons déduite du théorème précédent.

Lorsque deux plans quelconques P, P_1 coupent une feuillée, ils forment par leurs intersections avec celle-ci deux faisceaux, dont l'un peut être envisagé comme la projection de l'autre

depuis un centre de perspective pris sur l'arête SS_1. Or, les biquotients analogues de ces faisceaux sont égaux, puisqu'ils sont équivalents au biquotient de la feuillée. Donc :

La valeur d'un biquotient de quatre rayons reste la même, quand on remplace ces rayons par leurs projections sur un plan.

58. — Autrement. Lorsque deux faisceaux a, b, c, x et a_1, b_1, c_1, x_1 sont perspectifs, les droites correspondantes se coupent sur l'axe de perspective (v. 36) dans les points A, B, C, X. Or, les biquotients analogues des deux faisceaux sont égaux à celui des biquotients qui est semblablement formé avec les intersections sur l'axe de perspective; en d'autres termes, on a, par exemple,

$$(abcx) = (ABCX)$$
$$(a_1b_1c_1x_1) = (ABCX)$$

d'où

$$(abcx) = (a_1b_1c_1x_1)$$

c'est-à-dire

Lorsque deux faisceaux sont en perspective tout biquotient formé avec quatre rayons de l'un est égal au biquotient analogue de l'autre.

Cette seconde démonstration est plus générale que la première, car elle admet aussi le cas où les deux faisceaux perspectifs sont situés dans un même plan.

59*. Corollaire. *Lorsque deux feuillées sont en perspective, tout biquotient formé avec quatre plans de l'une est égal au biquotient analogue de l'autre.*

En effet, les intersections des plans correspondants se trouvent dans un plan (v. 38); ce dernier coupe donc les deux feuillées d'après un même faisceau. Les biquotients analogues des feuillées sont conséquemment égaux à un même biquotient du faisceau, et par suite ils sont égaux entre eux.

60*. Théorème. *Lorsqu'une droite coupe une feuillée de quatre plans, tout biquotient formé avec les intersections de la droite est égal au biquotient analogue de la feuillée.*

Soient *A*, *B*, *C*, *X** les plans de la feuillée et A, B, C, X leurs intersections avec la droite donnée. Menons par celle-ci un plan quelconque, qui coupera la feuillée d'après un faisceau de quatre rayons *a*, *b*, *c*, *x*.

Nous voulons encore démontrer que tout biquotient (AXCB) est égal à (*AXCB*). Or, on a

(*AXCB*) = (*axcb*) (v. 57)

(*axcb*) = (AXCB) (v. 55)

Donc (AXCB) = (*AXCB*).

61*. Corollaire. *Lorsque deux ou plusieurs droites coupent une même feuillée de quatre plans, les biquotients analogues formés avec les intersections de chaque droite sont égaux entre eux.*

62. Résumé. Nous avons considéré dans cet article tous les cas où deux systèmes primaires sont en situation de perspective, savoir : 1° une lignée avec une lignée (v. 56) ; 2° une lignée avec un faisceau (v. 55) : le faisceau est projeté du sommet S sur la droite *t;* 3° une lignée avec une feuillée (v. 60) : la feuillée est projetée une première fois d'un point de l'arête sur un plan passant par la droite, ce qui donne un faisceau ; celui-ci est ensuite projeté de son sommet sur la même droite, d'ou résulte la lignée en question ; 4° un faisceau avec un faisceau (v. 58) ; 5° un faisceau avec une feuillée (v. 57) : la feuillée est d'un point de l'arête projetée sur le plan du faisceau ; 6° une feuillée avec une feuillée (v. 59).

Dans toutes ces combinaisons, les biquotients analogues

* Les majuscules italiques représentent des plans.

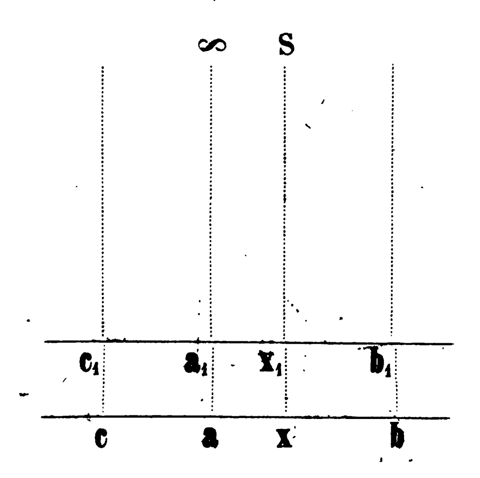
sont égaux ; donc, lorsque deux systèmes primaires sont perspectifs, tout biquotient formé avec quatre éléments quelconques de l'un est égal au biquotient formé avec les éléments correspondants de l'autre.

Il est évident que cette égalité subsiste encore, quand on fait abstraction de la situation de perspective, c'est-à-dire quand les systèmes primaires sont simplement projectifs ; les différents théorèmes de cet article sont ainsi compris dans l'énoncé suivant :

Lorsque deux systèmes primaires sont projectifs, tout biquotient formé avec quatre éléments quelconques de l'un est égal au biquotient formé avec les éléments correspondants de l'autre.

Conditions pour que deux systèmes primaires de 4 éléments soient perspectifs ou projectifs.

Nous allons maintenant examiner les systèmes primaires qui sont composés chacun de quatre éléments **a**, **b**, **c**, **d**, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$, et qui ont un biquotient (**abcd**), ($\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1$), de



même valeur. Les éléments $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$ qui sont représentés par des lettres occupant une même place dans les symboles $(\mathbf{abcd})$, $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$ seront appelés éléments correspondants.

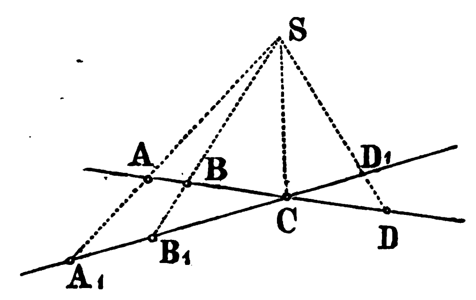
63. Théorème. *En général, lorsque deux systèmes primaires de quatre éléments chacun ont un biquotient de même valeur et qu'en outre trois éléments de l'un sont en situation de perspective avec les éléments correspondants de l'autre, il faut aussi que les quatrièmes éléments soient en perspective.*

Soit $(\mathbf{abcd}) = (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$; de plus, admettons que trois éléments $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ soient en perspective avec leurs correspondants $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$.

Désignons provisoirement par $\mathbf{b}_2$ l'élément qui dans le second système est en perspective avec $\mathbf{b}$. Puisque $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1$ et $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ sont perspectifs, le biquotient $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$ est égal à $(\mathbf{abcd})$ et par conséquent à $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$. Ainsi $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_1$ doivent être tels qu'avec trois mêmes éléments $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$ ils donnent naissance à des biquotients $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$, $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$ de même valeur; donc $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_1$ sont identiques (v. 54), et les deux systèmes donnés sont en situation de perspective.

64. Théorème. *Lorsque deux lignées de quatre points ont un biquotient de même valeur et qu'en outre deux éléments correspondants coïncident, les droites qui joignent les autres points correspondants concourent en un point* S, *et les deux lignées sont perspectives.*

Soient A, B, C, D les points d'une lignée et A_1, B_1, C, D_1



les points de l'autre; soit en outre (ABCD) = ($A_1B_1CD_1$) et supposons que deux points correspondants C coïncident.

Menons les droites AA_1, BB_1, qui se couperont en un point S.

Le biquotient (ABCD) est égal au biquotient analogue du faisceau AA_1, BB_1, SC, SD (v. 55), et (A_1 B_1 C D_1) au biquotient analogue du faisceau AA_1, BB_1, SC, SD_1 ; donc, en vertu de l'hypothèse, ces biquotients des deux faisceaux ont une même valeur (ABCD). Par conséquent, les droites SD, SD_1 coïncideront, vu qu'avec trois rayons AA_1, BB_1, SC elles doivent donner naissance à un biquotient de même valeur (v. 54).

Ainsi les droites AA_1, BB_1, etc., menées par les points correspondants, concourent en un même point S, qui est le centre de perspective des deux lignées (v. 6).

65. Corollaire. Puisque deux lignées, ayant un biquotient de même valeur, peuvent être placées en situation de perspective, il en résulte que tout biquotient de l'une est égal au biquotient semblablement formé de l'autre (v. 56).

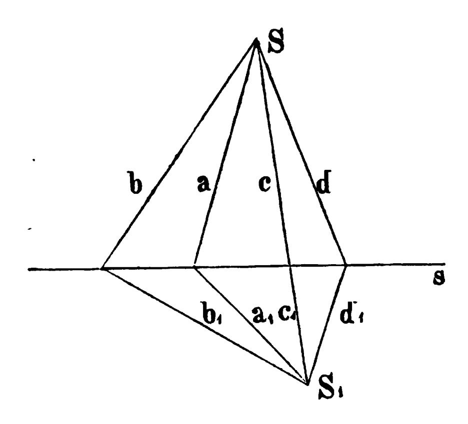
66. Théorème. *Deux lignées de quatre points sont en perspective, lorsqu'elles ont un biquotient de même valeur, et qu'un point de l'une coïncide avec un point quelconque de l'autre.*

Soit (ABCD) = (GHIK) et supposons, par exemple, que B coïncide avec K. On peut amener la lettre K à occuper comme B la seconde place dans le symbole (v. 47). Il suffit pour cela de permuter K avec H et G avec I, ce qui donne (ABCD) = (IKGH). Les lignées ont encore un même biquotient et les deux points qui coïncident sont correspondants, donc les droites AI, CG, DH passent par un point (v. 64), et les lignées sont perspectives.

67. Théorème. *Lorsque deux faisceaux de quatre rayons ont un biquotient de même valeur et qu'en outre deux éléments*

correspondants coïncident, les intersections des autres rayons correspondants sont situées sur une même droite et les faisceaux sont perspectifs.

Soient a, b, c, d les rayons d'un faisceau, et a_1, b_1, c, d_1, ceux de l'autre; soit en outre $(abcd) = (a_1b_1cd_1)$, et suppo-



sons que deux rayons correspondants c coïncident.

Par les points aa_1, bb_1 menons une droite s. Le biquotient $(abcd)$ est égal au biquotient analogue de la lignée aa_1, bb_1, sc, sd, (v. 55) et $(a_1b_1cd_1)$ au biquotient analogue de la lignée aa_1, bb_1, sc, sd_1; donc, en vertu de l'hypothèse, ces biquotients des deux lignées ont une même valeur $(abcd)$. Par conséquent, les points sd, sd_1 coïncident, vu qu'avec trois points aa_1, bb_1, sc ils doivent donner naissance à un biquotient de même valeur (v. 54).

Ainsi, les rayons correspondants se coupent en des points aa_1, bb_1, etc., situés sur une même droite s. Les deux faisceaux sont donc perspectifs (v. 36), et la ligne s en est *l'axe de perspective.*

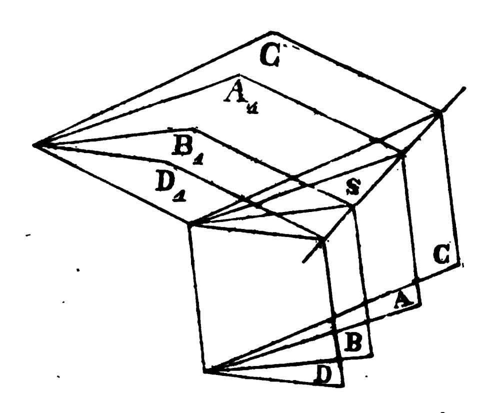
68. Corollaire. Puisque deux faisceaux, ayant un biquotient de même valeur, peuvent être placés en situation de perspective, il en résulte que tout biquotient de l'un est égal au biquotient semblablement formé de l'autre (v. 58).

69. Théorème. *Deux faisceaux de quatre rayons sont perspectifs, lorsqu'ils ont un biquotient de même valeur, et qu'un rayon de l'un coïncide avec un rayon quelconque de l'autre.*

La démonstration est semblable à celle qui a été donnée précédemment (v. 66).

70*. Théorème. *Lorsque deux feuillées de quatre plans ont un biquotient de même valeur et qu'en outre deux éléments (plans) coïncident, les plans correspondants se coupent en des lignes situées dans un même plan, et les deux feuillées sont perspectives.*

Soient A, B, C, D les plans d'une feuillée et A_1, B_1, C, D_1 ceux de l'autre; soit en outre $(ABCD) = (A_1B_1CD_1)$



et supposons que deux plans correspondants C coïncident.

Par les droites AA_1, BB_1 menons un plan S. Le bi-

quotient *(ABCD)* est égal au biquotient analogue du faisceau AA_1, BB_1, SC, SD (v. 57) et $(A_1B_1CD_1)$ au biquotient analogue du faisceau AA_1, BB_1, SC, SD_1 ; donc, en vertu de l'hypothèse, ces biquotients des deux faisceaux ont une même valeur. Par conséquent, les droites SD, SD_1 coïncident, puisqu'avec trois rayons AA_1, BB_1, SC elles doivent donner naissance à un biquotient de même valeur.

Ainsi les plans correspondants se coupent suivant des droites situées dans un même plan S, et les deux feuillées sont perspectives (v. 38).

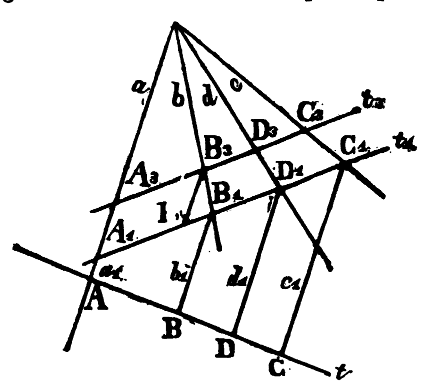
71. * Théorème. *Deux feuillées de quatre plans sont perspectives, lorsqu'elles ont un biquotient de même valeur et qu'un plan de l'une coïncide avec un plan quelconque de l'autre.*

La démonstration est encore semblable à celle du § 66.

72. Théorème. *Lorsqu'une lignée et un faisceau de quatre éléments chacun ont un biquotient de même valeur, il est toujours possible de les placer en situation de perspective, c'est-à-dire qu'on peut mettre les points de la lignée sur les rayons correspondants du faisceau.*

Soit (ABCD) = *(abcd)*.

Placez la lignée *t* de telle manière qu'un point A se trouve



sur le rayon correspondant *a*. Par les autres points B, C, D, menez des droites b_1, c_1, d_1 parallèles à *a*. Le faisceau a_1, b_1, c_1, d_1 a un même biquotient que la lignée A, B, C, D (v. 55) et par conséquent que le faisceau *a*, *b*, *c*, *d*; de plus, les éléments correspondants *a*, a_1 coïncident; donc les deux faisceaux sont en perspective et se coupent en des points A_1, B_1, C_1, D_1 situés sur une droite t_1 (v. 67). Prenez sur cette dernière une longueur (A_1I) égale à (AB), menez par I une parallèle au rayon *a* et par l'intersection B_3 avec *b* une parallèle t_3 à t_1. La lignée A_3, B_3, C_3, D_3 formée par les intersections de t_3 avec les rayons *a*, *b*, *c*, *d* est en perspective avec ce faisceau. En outre, elle est égale à la lignée A, B, C, D; car les différents segments sur t_3 et sur *t* sont proportionnels aux segments correspondants sur t_1; ils sont donc proportionnels entre eux; et puisque $(A_3B_3) = (AB)$, il en résulte que $(B_3C_3) = (BC)$, etc.

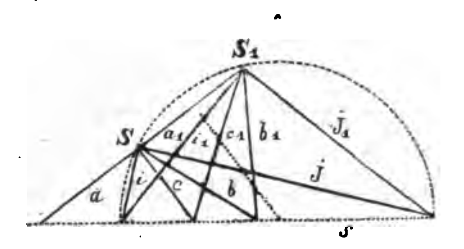
73* Théorème. *Lorsqu'une lignée et une feuillée de quatre éléments chacun ont un biquotient de même valeur, il est toujours possible de les placer en situation de perspective, c'est-à-dire qu'on peut mettre les points de la lignée dans les plans correspondants de la feuillée.*

Coupez la feuillée par un plan quelconque, puis, au moyen de la construction précédente, mettez la lignée en perspective avec le faisceau des quatre intersections.

74* Théorème. *Lorsqu'un faisceau et une feuillée de quatre éléments chacun ont un biquotient de même valeur, il est toujours possible de les placer en situation de perspective, c'est-à-dire qu'on peut mettre les rayons du faisceau dans les plans correspondants de la feuillée.*

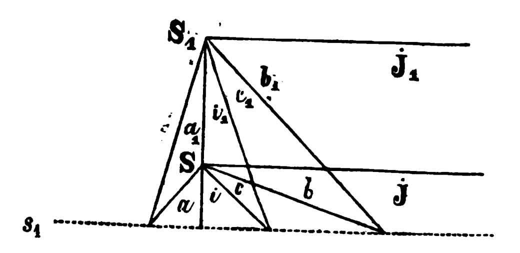
Soient a_1, b_1, c_1, d_1 les rayons du faisceau et *a*, *b*, *c*, *d* les intersections de la feuillée avec un plan perpendiculaire à l'arête; soit en outre $(abcd) = (a_1b_1c_1d_1)$.

Mettez les deux faisceaux de manière à ce qu'une paire d'éléments correspondants a, a_1 coïncident; les faisceaux se-



ront alors en perspective et les autres rayons correspondants se couperont en des points situés sur une droite s (v. 67). Menez à SS_1 une perpendiculaire par son milieu et soit C le point où elle rencontre l'axe s. De C comme centre et avec SC pour rayon tracez une circonférence, qui coupera s en deux points; puis joignez ces points avec S, S_1 par les droites i, i_1, j, j_1. Il est évident que les angles (ij), (i_1j_1) sont droits. Les faisceaux a, b, c, d, i, j, et a_1, b_1, c_1, d_1, i_1, j_1 sont en situation de perspective; tout biquotient formé avec quatre rayons de l'un est donc égal au biquotient formé avec les éléments correspondants de l'autre.

Placez ensuite ces deux faisceaux de manière à ce que i



coïncide avec i_1 et soit s_1 l'axe de perspective où se coupent aa_1, bb_1, cc_1. Or, comme $(abij) = (a_1b_1i_1j_1)$, les deux rayons j, j_1 doivent se rencontrer sur la même droite que a, a_1, c'est-à-dire sur s_1; mais j, j_1 sont parallèles, puisque les angles (ij), (i_1j_1) sont droits; donc j, j_1 sont parallèles à s_1 et par suite cette dernière ligne est perpendiculaire sur i.

Maintenant il suffira de tourner le plan du faisceau a_1, b_1, c_1 autour de s_1 jusqu'à ce que S_1 se trouve sur la perpendiculaire* érigée en S sur le plan du faisceau a, b, c, . . . Les plans menés par les rayons correspondants a, a_1, etc., forment évidemment une feuillée égale à celle qui est donnée et contenant en outre le faisceau a_1, b_1, c_1, d_1.

75. Nous venons de passer en revue les six combinaisons que l'on peut établir avec les systèmes primaires de quatre éléments, et nous avons par là démontré que si deux systèmes ont un biquotient de même valeur, il y a toujours possibilité de les placer en situation de perspective. Il en résulte qu'ils sont alors projectifs. Ainsi :

Deux systèmes primaires de quatre éléments chacun sont projectifs, lorsqu'ils ont un biquotient de même valeur.

Cette propriété générale est la réciproque du dernier théorème de l'article précédent; elle entraîne évidemment l'égalité de tous les biquotients formés avec les éléments correspondants (v. 62). Il nous sera donc permis de désigner dorénavant par le nom de ***systèmes primaires projectifs*** deux systèmes primaires ayant un biquotient de même valeur.

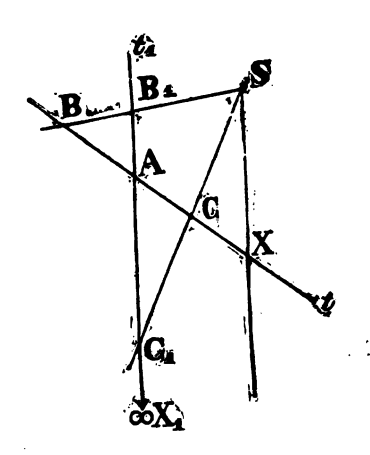
* Cette rencontre est possible seulement quand le sommet S_1 est plus éloigné de l'axe que S, c'est-à-dire quand l'angle (a_1i_1) du triangle $a_1i_1s_1$ est moindre que l'angle (ai) du triangle ais_1. Or si tel n'est pas le cas, il suffit de poser les deux faisceaux de manière à ce que j coïncide avec j_1, car (a_1j_1) est alors moindre que (aj).

Constructions.

76. PROBLÈME. *Etant donnés trois points* A, B, C *sur une droite* t, *en chercher un quatrième* X *tel qu'un certain biquotient de ces quatre points ait une valeur* $\frac{p}{q}$.

Admettons qu'on veuille avoir $(ACXB) = \frac{p}{q}$; si la lettre X, qui représente le point inconnu, n'occupe pas la troisième place dans le symbole, on l'y amènera par des permutations (v. 47).

Menez par un des points donnés A une droite quelconque t_1;



prenez sur cette dernière un segment $(AC_1) = p$. Puis, dans le même sens, si p et q sont de signes contraires, sinon dans le sens inverse, vous porterez une longueur $(C_1B_1) = q$. La droite menée parallèlement à t_1 par le point de concours S de CC_1 avec BB_1 coupera t au point cherché X.

En effet, les quatre points A, B, C, X sont en perspective du centre S avec A, B_1, C_1, X_1, ce dernier étant le point infini de t_1; donc le biquotient $\frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AX)}{(XB)}$ est égal à

$$\frac{(AC_1)}{(C_1B_1)} : \frac{(AX_1)}{(X_1B_1)}.$$

Mais, d'un côté, $\frac{(AC_1)}{(C_1B_1)} = -\frac{p}{q}$ par suite de la construction; de l'autre $\frac{(AX_1)}{(X_1B_1)} = -1$, en vertu de la définition du point infini (toutes les fois que le point de section est à l'infini, le rapport de simple section est égal à -1; ce fait ressort de la construction indiquée à la page 22 : en effet, si l'on porte une longueur (AM) quelconque, puis en un sens inverse une longueur égale (MN), le point X s'éloigne à l'infini et le rapport de simple section vaut -1). Ainsi $\frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AX)}{(XB)}$ c'est-à-dire (ACXB) a pour valeur $\frac{p}{q}$.

77. PROBLÈME GÉNÉRAL. *Etant donnés trois éléments* **a, b, c** *d'un système primaire en trouver un quatrième* **x** *tel qu'un certain biquotient* (**acxb**) *de ces quatre éléments ait une valeur donnée* $\frac{p}{q}$.

Nous ramenons ce cas à celui que nous venons de traiter. Si le système primaire n'est pas une lignée, nous le coupons par une droite t, puis nous cherchons sur cette droite un point X tel qu'avec les trois intersections A, B, C il donne naissance à un biquotient (ACXB) dont la valeur soit $\frac{p}{q}$. L'élément **x** mené par ce point X satisfait à la condition posée.

78. PROBLÈME. *Etant donnés trois points* A, B, C *sur une*

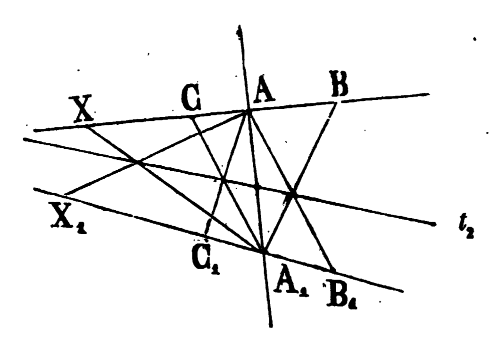
droite t, en chercher un quatrième X *tel que la lignée de ces quatre points ait un biquotient égal à celui d'une autre lignée de quatre points donnés* A_1, B_1, C_1, X_1.

Ce problème est identique avec le suivant :

Etant donnés trois points A, B, C *d'une droite, en chercher un quatrième* X *tel que la lignée de ces quatre points soit projective avec une lignée de quatre points donnés* A_1, B_1, C_1, X_1.

Premier cas. Les deux lignées sont dans un même plan et sur des droites différentes.

Supposons le point X trouvé. Les faisceaux AA_1, AB_1, AC_1, AX_1 et A_1A, A_1B, A_1C, A_1X, formés autour de deux points correspondants A, A_1 ont respectivement les mêmes biquotients



que les lignées A_1, B_1, C_1, X_1 et A, B, C, X, avec lesquelles ils sont en perspective ; donc les deux faisceaux doivent avoir des biquotients égaux ; de plus, deux rayons correspondants AA_1, A_1A coïncident, donc les autres rayons correspondants se coupent sur une droite t_2 (v. 67). De là résulte la construction suivante, qui peut s'effectuer avec la règle seule :

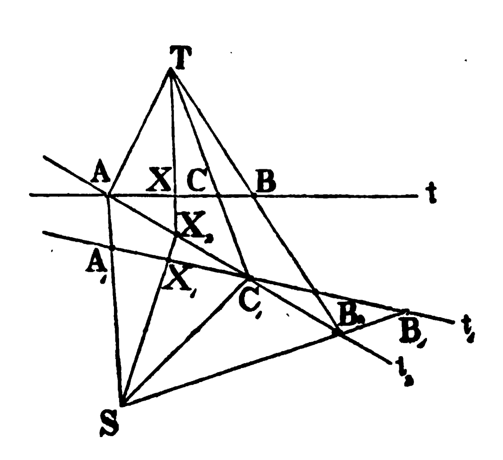
Menez une droite t_2 par les points de concours de AB_1 avec A_1B et de AC_1 avec A_1C ; puis déterminez l'intersection des deux lignes AX_1, t_2; la droite qui passe par ce point d'intersection et par A_1 coupe t au point cherché X.

Second cas. Les deux lignées sont situées sur une même droite t.

Projetez l'une des lignées A, B, C sur une droite t_2 située dans le même plan ; déterminez ensuite comme dans le cas précédent le point X_2 qui correspond à X_1. La projection X de X_2 sur t sera le point cherché ; car

$$(A_1B_1C_1X_1) = (A_2B_2C_2X_2) = (ABCX)$$

Troisième cas. Si les deux lignées t, t_1 ne sont pas dans un même plan, on même une droite t_2 par deux points donnés A, C_1 non correspondants. On projette ensuite la lignée t



sur t_2 depuis un point T situé sur CC_1 ; on obtient les points A, B_2, C_1, X_2. Par l'intersection S de AA_1 avec B_2B_1 on tire la droite SX_2 qui coupera t_1 en X_1. En effet les quatre

points A, B, C, X sont en perspective avec A, B_2, C_1, X_2, et ceux-ci avec A_1, B_1, C_1, X_1; donc le premier système est projectif avec le dernier.

79. Problème général. *Etant donnés trois éléments* **a**, **b**, **c** *d'un système primaire, en trouver un quatrième* **x** *tel qu'un certain biquotient* (**acxb**) *de ces quatre éléments soit égal au biquotient analogue* ($\mathbf{a}_1\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1\mathbf{b}_1$) *d'un second système primaire donné,* ou bien

Etant donnés trois éléments **a**, **b**, **c** *d'un système primaire, en chercher un quatrième* **x** *tel que le système de ces quatre éléments soit projectif avec un autre système primaire donné.*

Si le premier système n'est pas une lignée, nous le coupons par une droite; nous faisons de même pour le second système. Nous cherchons ensuite comme dans le problème précédent un quatrième point tel que les deux lignées soient projectives. L'élément qui passe par ce point est celui qu'on doit trouver.

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES

DES

SYSTÈMES PRIMAIRES COMPLETS

Après avoir étudié les propriétés projectives des systèmes primaires de quatre éléments, il nous est facile d'aborder le cas où les systèmes sont complets.

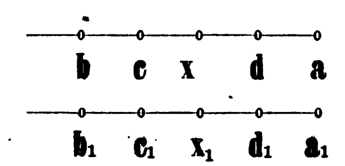
Deux systèmes primaires en général.

EGALITÉ DES BIQUOTIENTS ANALOGUES. — 80. Nous rappelons en première ligne cette propriété fondamentale :

Lorsque deux systèmes primaires sont projectifs, tout biquotient formé avec quatre éléments quelconques de l'un est égal au biquotient analogue des éléments correspondants de l'autre (v. 62).

81. La proposition réciproque est également vraie. Soient en effet deux systèmes primaires $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$. Choisissez arbitrairement dans $\mathfrak{t}$ trois éléments $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et dans $\mathfrak{t}_1$ trois autres $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ que vous regarderez comme les éléments correspon-

dants respectifs de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Prenez ensuite un quatrième élément $\mathbf{d}$ et déterminez $\mathbf{d}_1$



de manière que ce dernier ait avec $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ un biquotient $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$ égal au biquotient analogue $(\mathbf{abcd})$ de l'autre système (v. 79). Puis à chaque élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{t}$ faites correspondre un élément $\mathbf{x}_1$ tel qu'un biquotient $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1\mathbf{x}_1)$ de cet élément et de trois autres $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{d}_1$ déjà fixés soit égal au biquotient analogue $(\mathbf{abdx})$. Cela fait, il est toujours possible de placer les deux systèmes $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$ de sorte que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ soient en perspective avec $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$, puisque ces deux groupes ont un même biquotient (v. 75). Il en sera de même pour chaque nouvelle paire $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, car elle forme avec trois autres paires perspectives $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}_1$, deux biquotients analogues égaux. Ainsi :

Etant donnés arbitrairement dans deux systèmes primaires trois couples d'éléments correspondants $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$, *si à chaque élément* $\mathbf{x}$ *du premier système on fait correspondre dans le second un élément* $\mathbf{x}_1$, *tel qu'un biquotient de cet élément et de trois autres déjà fixés soit égal au biquotient analogue des éléments correspondants, les deux systèmes primaires seront projectifs.*

A plus forte raison :

Deux systèmes primaires dont les éléments se correspondent un à un, sont projectifs, lorsque tout biquotient de quatre élé-

ments quelconques de l'un est égal au biquotient analogue des éléments correspondants de l'autre.

82. De ce dernier théorème résulte que :

***Deux systèmes primaires* t, t₁ *sont projectifs l'un avec l'autre, si chacun d'eux est projectif avec un troisième* t₂.**

DÉTERMINATION DE DEUX SYSTÈMES PROJECTIFS. — 83. Deux systèmes primaires sont complètement déterminés par la donnée de trois paires d'éléments correspondants **a**, $\mathbf{a}_1$, **b**, $\mathbf{b}_1$, **c**, $\mathbf{c}_1$, et par conséquent ils sont égaux, si l'on peut faire coïncider trois éléments **a**, **b**, **c** de l'un avec les éléments correspondants de l'autre.

En effet, il existe toujours un seul et unique élément $\mathbf{x}_1$ qui dans l'un des systèmes $\mathbf{t}_1$ puisse correspondre à un élément quelconque **x** donné dans l'autre, vu que le groupe $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ $\mathbf{x}_1$ doit avoir un biquotient égal au biquotient analogue des éléments correspondants **a**, **b**, **c**, **x**.

SITUATION EN PERSPECTIVE. — 84. *Deux systèmes primaires sont perspectifs, lorsqu'ils sont projectifs et qu'en outre trois paires d'éléments correspondants sont en situation de perspective.*

Si **a**, **b**, **c** et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, sont en perspective, il en sera de même d'une quatrième paire quelconque **x**, $\mathbf{x}_1$ puisque les biquotients analogues de ces deux groupes de quatre éléments sont égaux (v. 63).

CONSTRUCTION. — 85. Etant donnés deux systèmes primaires **t**, $\mathbf{t}_1$ par trois couples d'éléments correspondants, on peut se proposer de construire l'élément $\mathbf{x}_1$ qui dans $\mathbf{t}_1$ correspond à un certain élément **x** de **t**. Il suffit alors de placer les deux systèmes de manière à ce que trois couples d'éléments correspondants soient en perspective; celui des éléments de $\mathbf{t}_1$ qui se trouve alors en perspective avec **x** sera

l'élément cherché. Au reste, il y a encore d'autres procédés, dont l'application est plus facile suivant les cas (v. 79).

ÉQUATION ENTRE DEUX SYSTÈMES PROJECTIFS. — **86.** Il est possible d'exprimer, au moyen d'une équation du premier degré, la relation qui existe entre deux systèmes primaires projectifs $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$. Soient en effet $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ trois éléments de $\mathfrak{t}$; si l'on donne dans $\mathfrak{t}_1$ les trois éléments $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ qui doivent leur correspondre, les deux systèmes seront déterminés, et une quatrième paire quelconque $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ satisfera nécessairement à la condition

$$(\mathfrak{axcb}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1)$$

Or le biquotient de quatre éléments peut s'écrire sous une forme particulière, si l'on rapporte les éléments à des origines

a k x b c

fixes. Considérons d'abord le cas où le système $\mathfrak{t}$ est une lignée et choisissons comme origine un point fixe $\mathfrak{k}$ de cette lignée, en regardant l'un des sens de la droite comme positif et l'autre comme négatif. Mais

$$(\mathfrak{ax}) = (\mathfrak{ak})+(\mathfrak{kx}) = -(\mathfrak{ka})+(\mathfrak{kx})$$
$$(\mathfrak{xb}) = (\mathfrak{xk})+(\mathfrak{kb}) = -(\mathfrak{kx})+(\mathfrak{kb})$$

etc..... (v. 32);

Nous en concluons que

$$(\mathfrak{axcb}) = \frac{(\mathfrak{ax})}{(\mathfrak{xb})} : \frac{(\mathfrak{ac})}{(\mathfrak{cb})} = \frac{-(\mathfrak{ka})+(\mathfrak{kx})}{-(\mathfrak{kx})+(\mathfrak{kb})} : \frac{-(\mathfrak{ka})+(\mathfrak{kc})}{-(\mathfrak{kc})+(\mathfrak{kb})}$$

Les distances des points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{x}$ à l'origine $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire

les longueurs (**ka**), (**kb**), (**kc**), (**kx**), étant représentées respectivement par les lettres a, b, c, x, le biquotient (**axcb**) pourra s'écrire

$$\frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b}$$

Si, au contraire, le système **t** est un faisceau, nous prendrons pareillement un rayon fixe **k**, à partir duquel les angles seront mesurés. Quel que soit le sens regardé comme positif,

$$(\mathbf{ax}) = (\mathbf{ak})+(\mathbf{kx}) = -(\mathbf{ka})+(\mathbf{kx})$$

d'où

$$\text{Sin}(\mathbf{ax}) = -\text{Sin}(\mathbf{ka}).\text{Cos}(\mathbf{kx})+\text{Sin}(\mathbf{kx}).\text{Cos}(\mathbf{ka})$$

Pour la même raison

$$\text{Sin}(\mathbf{xb}) = -\text{Sin}(\mathbf{kx}).\text{Cos}(\mathbf{kb})+\text{Sin}(\mathbf{kb}).\text{Cos}(\mathbf{kx})$$

et ainsi des autres.

Donc le biquotient (**axcb**) ou

$$\frac{\text{Sin}(\mathbf{ax})}{\text{Sin}(\mathbf{xb})} : \frac{\text{Sin}(\mathbf{ac})}{\text{Sin}(\mathbf{cb})}$$

est égal à

$$\frac{-\text{Sin}(\mathbf{ka}).\text{Cos}(\mathbf{kx})+\text{Sin}(\mathbf{kx}).\text{Cos}(\mathbf{ka})}{-\text{Sin}(\mathbf{kx}).\text{Cos}(\mathbf{kb})+\text{Sin}(\mathbf{kb}).\text{Cos}(\mathbf{kx})} : \frac{-\text{Sin}(\mathbf{ka}).\text{Cos}(\mathbf{kc})+\text{Sin}(\mathbf{kc}).\text{Cos}(\mathbf{ka})}{-\text{Sin}(\mathbf{kc}).\text{Cos}(\mathbf{kb})+\text{Sin}(\mathbf{kb}).\text{Cos}(\mathbf{kc})}$$

et par conséquent à

$$\frac{-\text{Tang}(\mathbf{ka})+\text{Tang}(\mathbf{kx})}{-\text{Tang}(\mathbf{kx})+\text{Tang}(\mathbf{kb})} : \frac{-\text{Tang}(\mathbf{ka})+\text{Tang}(\mathbf{kc})}{-\text{Tang}(\mathbf{kc})+\text{Tang}(\mathbf{kb})}$$

Cette dernière expression devient

$$\frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b}$$

si l'on admet que les lettres a, b, c, x représentent ici les tangentes des angles formés par les rayons **a, b, c, x** avec un rayon fixe **k.**

Lorsque le système **t** est une feuillée, le même raisonnement est encore applicable.

Ainsi quelle que soit la nature du système primaire **a, b, c, x,** le biquotient (**axcb**) pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b},$$

où les lettres a, b, c, x représentent, dans le cas d'une lignée, les longueurs des segments (**ka**), (**kb**), (**kc**), (**kx**) formés par les points respectifs **a, b, c, x** avec un point fixe **k** de la même lignée et, dans le cas du faisceau ou de la feuillée, les tangentes des angles (**ka**), (**kb**), (**kc**), (**kx**) formés par les éléments respectifs **a, b, c, x** avec un élément fixe **k.**

87. Revenons aux deux systèmes primaires **t**, $\mathbf{t}_1$ proposés. Prenons dans le système **t** une origine **k** et représentons par a, b, c, x, suivant les cas, soit les longueurs (**ka**), (**kb**).... soit les tangentes des angles (**ka**), (**kb**)... Alors

$$(\mathbf{axcb}) = \frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b}$$

En fixant de même dans le système $\mathbf{t}_1$ une origine $\mathbf{l}_1$, et en représentant par a_1, b_1, c_1, x_1 les longueurs ($\mathbf{l}_1\mathbf{a}_1$), ($\mathbf{l}_1\mathbf{b}_1$),..... ou les tangentes des angles ($\mathbf{l}_1\mathbf{a}_1$), ($\mathbf{l}_1\mathbf{b}_1$)..., nous aurons

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1\mathbf{c}_1\mathbf{b}_1) = \frac{-a_1+x_1}{-x_1+b_1} : \frac{-a_1+c_1}{-c_1+b_1}.$$

Mais les deux systèmes t, t_1 sont projectifs, donc

$$(axcb) = (a_1x_1c_1b_1)$$

et par suite

$$(1) \qquad \frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b} = \frac{-a_1+x_1}{-x_1+b_1} : \frac{-a_1+c_1}{-c_1+b_1}$$

Après avoir effectué les opérations nécessaires pour ordonner cette expression par rapport à x et x_1, nous aurons la relation suivante * :

$$(2) \quad \left\{a(b_1-c_1)+b(c_1-a_1)+c(a_1-b_1)\right\} x\, x_1$$
$$- \left\{ aa_1 (b_1-c_1)+bb_1(c_1-a_1)+cc_1(a_1-b_1) \right\} x$$
$$+ \left\{aa_1(b-c)+bb_1(c-a)+cc_1(a-b)\right\} x_1$$
$$- \left\{aa_1(bc_1-b_1c)+bb_1(ca_1-c_1a)+cc_1(ab_1-a_1b)\right\} = 0$$

(*) L'équation (2) peut, au moyen de la théorie des déterminants, se déduire de la précédente (1), pour ainsi dire sans aucun calcul. En effet, elle doit être évidemment du premier degré, soit par rapport à x, soit par rapport à x_1 : elle est donc de la forme

$$xx_1 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}x_1 + \frac{q}{m} = 0$$

où les coefficients $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ sont inconnus. De plus, il faut qu'elle soit satisfaite, quant on remplace x, x_1 par les trois couples de valeurs a, a_1, b, b_1, c, c_1.

Donc on a

$$aa_1 + \frac{n}{m}a + \frac{p}{m}a_1 + \frac{q}{m} = 0$$

$$bb_1 + \frac{n}{m}b + \frac{p}{m}b_1 + \frac{q}{m} = 0$$

$$cc_1 + \frac{n}{m}c + \frac{p}{m}c_1 + \frac{q}{m} = 0$$

que nous exprimerons plus brièvement par

$$(3)\qquad mxx_1+nx+px_1+q=0$$

où

$$(4)\quad \begin{cases} m = a(b_1-c_1)+b(c_1-a_1+c(a_1-b_1) \\ n = -aa_1(b_1-c_1)-bb_1(c_1-a_1)-cc_1(a_1-b_1) \\ p = aa_1(b-c)+bb_1(c-a)+cc_1(a-b) \\ q = -aa_1(bc_1-b_1c)-bb_1(ca_1-c_1a)-cc_1(ab_1-a_1b) \end{cases}$$

88. L'équation générale à quatre termes (2) est ainsi la traduction algébrique de la relation qui existe entre deux systèmes primaires projectifs; on en peut déduire facilement les principales propriétés que nous avons vues jusqu'à présent. En premier lieu, elle est symétrique par rapport aux deux systèmes, puisqu'elle est vérifiée quand on remplace a, b, c, x par a_1, b_1, c_1, x_1 et vice-versâ; donc les deux systèmes jouent le même rôle l'un vis-à-vis de l'autre. Elle est également symétrique par rapport aux différentes paires d'éléments correspondants, car elle n'est pas modifiée, si l'on permute a, a_1 avec b, b_1 ou avec c, c_1. De ce que l'équation est du premier degré soit en x, soit en x_1, on en conclut qu'à une valeur donnée x correspond toujours une seule valeur x_1; en d'autres

---

Si, entre les quatre dernières équations, on élimine les quantités inconnues $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ qui s'y trouvent au premier degré, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} xx_1 & x & x_1 & 1 \\ aa_1 & a & a_1 & 1 \\ bb_1 & b & b_1 & 1 \\ cc_1 & c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Telle est la forme élégante sous laquelle on peut écrire l'équation (2). Les coefficients de xx_1, x, x_1 et le terme connu s'obtiennent sans difficulté.

termes à un élément **x** du premier système correspond toujours un seul élément $\mathbf{x_1}$ du second et réciproquement. Enfin il est clair que l'équation est complètement déterminée, lorsqu'on donne les valeurs a, a_1, b, b_1, c, c_1 : ce qui revient à dire que deux systèmes projectifs sont déterminés par trois paires d'éléments correspondants.

Si les deux éléments correspondants $\mathbf{c}$, $\mathbf{c_1}$ sont pris pour origines, les quantités c, c_1 seront nulles et l'équation (2) deviendra

$$(5) \quad (ab_1 - a_1b)xx_1 - a_1b_1(a-b)x_1 + ab(a_1 - b_1)x_1 = 0$$

89. Réciproquement *lorsqu'entre les longueurs des segments (ou les tangentes des angles) formés par les éléments correspondants* **x, x₁** *de deux systèmes primaires* **t, t₁** *avec des origines fixes* **k, l₁**, *il existe une relation exprimée par une équation du premier degré, les deux systèmes sont projectifs.*

Soit

$$mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

l'équation donnée; soient en outre $\mathbf{x}, \mathbf{x_1}, \mathbf{a}, \mathbf{a_1}, \mathbf{b}, \mathbf{b_1}, \mathbf{c}, \mathbf{c_1}$ quatre paires quelconques d'éléments correspondants et $x, x_1, a, a_1, b, b_1, c, c_1$ les longueurs des segments ou les tangentes des angles $(\mathbf{kx})$, $(\mathbf{l_1\, x_1})$, $(\mathbf{ka})$, $(\mathbf{l_1\, a_1})$.....

De l'équation ci-dessus on déduit

$$x_1 = -\frac{nx+q}{mx+p} \quad \text{et par suite}$$

$$a_1 = -\frac{na+q}{ma+p}$$

$$b_1 = -\frac{nb+q}{mb+p}$$

$$c_1 = -\frac{nc+q}{mc+p}$$

Les biquotients $(axcb)$, $(a_1x_1c_1b_1)$ peuvent s'écrire

$$\frac{-a+x}{-x+b} : \frac{-a+c}{-c+b}$$

$$\frac{-a_1+x_1}{-x_1+b_1} : \frac{-a_1+c_1}{-c_1+b_1}$$

Or, si l'on substitue dans cette dernière expression à la place de x_1, a_1, b_1, c_1 les valeurs ci-dessus, on trouve que les deux biquotients sont égaux. Donc les deux systèmes t, t_1 sont projectifs.

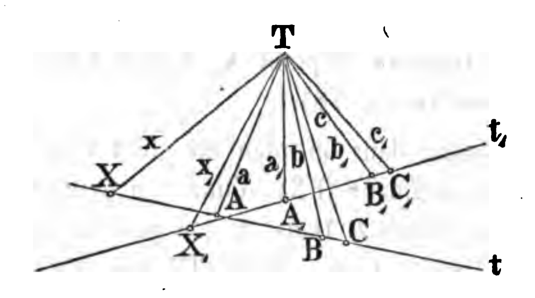
90. L'étroite parenté que nous venons d'établir entre la relation de deux systèmes primaires projectifs et l'équation du premier degré est très-importante au point de vue des applications. Un simple coup d'œil suffit quelquefois pour montrer que deux systèmes primaires t, t_1 sont projectifs. En effet, si nous désignons par x, x_1, les longueurs des segments (éventuellement les tangentes des angles) formés par les éléments correspondants x, x_1 avec des origines fixes k, l_1, il est clair qu'à une valeur donnée x correspondra toujours une seule valeur x_1 et vice-versâ, quand les éléments des deux systèmes t, t_1 se correspondent un à un. Or cette relation traduite en algèbre amène entre x et x_1 une équation du premier degré par rapport à l'une quelconque de ces quantités, toutes les fois qu'il ne s'agit point d'une question de nature transcendante. Nous en concluons que les deux systèmes t, t_1 doivent être alors projectifs. Ainsi

Deux systèmes primaires complets dont tous les éléments se correspondent un à un sont projectifs, quand il n'y a pas entre eux une relation de nature transcendante.

Si l'on a reconnu que les éléments de deux systèmes se correspondent un à un, on peut généralement admettre qu'ils sont projectifs. Il suffit donc de construire trois paires d'élé-

ments correspondants; la construction d'une quatrième paire se fera dès lors sans aucune difficulté. Les exemples suivants et qui n'ont rien de transcendant, montreront les précieux avantages de cette méthode féconde.

Applications. — 91. On donne dans un plan deux droites fixes t, t_1 et un angle qui tourne autour de son sommet T. Dans la position (xx_1) de l'angle, le premier côté x coupe la droite t en un point X, tandis que le second x_1 rencontre t_1 en X_1.



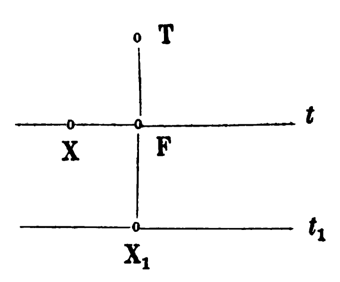
Si la droite x tourne jusqu'à ce qu'elle reprenne sa position initiale, elle décrira tous les points de t; pendant ce temps, x_1 parcourra également tous les points de t_1. Nous obtenons ainsi deux lignées t, t_1 et nous remarquerons de suite qu'à un point quelconque X de l'une d'entre elles correspond un seul point X_1 de l'autre. Nous en concluons que les deux lignées t, t_1 sont projectives, ce qu'il est du reste facile de vérifier.

Soient en effet A, B, C, X quatre points quelconques sur t, et A_1, B_1, C_1, X_1 les points simultanés ou correspondants sur t_1. Les angles ATA_1, BTB_1 sont égaux en vertu de l'hypothèse; donc, si on les retranche chacun de l'angle ATB_1, les restes

A_1TB_1, ATB seront égaux. Il en est de même pour les autres angles correspondants A_1TX_1, ATX, etc. En conséquence, tout biquotient du faisceau des quatre rayons TA_1, TB_1, TC_1, TX_1 est égal au biquotient analogue du faisceau TA, TB, TC, TX et par suite tout biquotient des quatre points A_1, B_1, C_1, X_1 est égal au biquotient formé d'une manière semblable avec A, B, C, X (v. 55); donc les deux lignées t, t_1 sont projectives (v. 81).

Trois paires de points A, A_1, B, B_1, C, C_1 étant construites avec la règle et le compas, toutes les autres paires pourront s'obtenir avec la règle seule. Si l'on donne, par exemple, le point X, on trouvera le point X_1 d'après l'un des procédés que nous avons vus (v. 78).

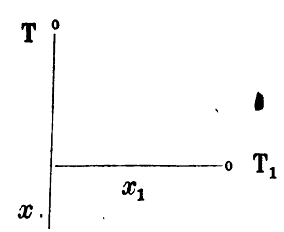
92. On donne dans un plan un point T et deux droites t, t_1 fixes. Un segment (FX) d'une longueur constante se meut sur une droite t. Dans chaque position on mène par T et par l'extrémité F une droite TF qui coupera t_1 en un point X_1.



A chaque point X de t correspond ainsi un seul point X_1 sur t_1 et vice-versâ. Donc les deux lignées sont projectives. Si l'on glisse toute la lignée t sur elle-même jusqu'à ce que le

point X vienne là où se trouvait F, les deux lignées seront en perspective.

93. Dans un plan sont donnés deux points fixes T, T_1, une droite variable x passant par T, et une perpendiculaire x_1 abaissée du point T_1 sur chaque droite x.



A chaque rayon du faisceau T correspond une seule droite par T_1 et vice-versâ. Donc les deux faisceaux T, T_1 sont projectifs; on peut s'en convaincre par l'examen des biquotients analogues.

94. On donne dans un plan un point T et deux droites fixes t, t_1. On mène par T une droite variable x qui coupe t en un point X, et de ce dernier on abaisse chaque fois sur t_1 une perpendiculaire, qui rencontre t_1 en X_1.

A chaque rayon x du faisceau T correspond un seul point X_1 sur t_1; et réciproquement à chaque point X_1 de la lignée t_1 correspond une seule droite par T. Donc le faisceau T et la lignée t_1 sont projectifs.

95. On donne un point T et une droite t. Par cette dernière on mène un plan variable X, sur lequel on abaisse chaque fois du point T une perpendiculaire x.

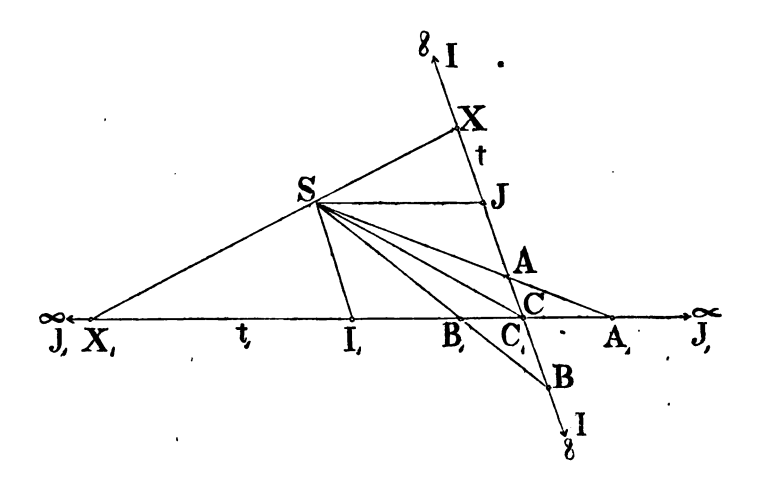
A chaque plan X de la feuillée t correspond une seule

droite x par T; et réciproquement à chaque rayon x du faisceau T correspond un seul plan X passant par t. Donc la feuillée t et le faisceau T sont projectifs.

Deux lignées projectives en général.

Génération de deux lignées projectives. — 96. D'après la définition que nous en avons donnée, deux lignées sont projectives, lorsqu'elles peuvent être placées en perspective. Examinons comment dans cette situation les différents points se comportent entre eux, et recherchons s'il n'y en a pas qui jouissent d'une particularité remarquable.

La projection des points d'une lignée t depuis un centre S



sur un plan ou sur une autre droite située dans le plan projetant, engendre une nouvelle lignée t_1 qui est projective avec t. Le rayon qui passe par un point A de t détermine sur t_1 le point correspondant A_1 ; et réciproquement le rayon

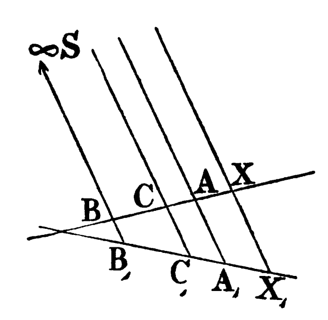
mené par le point A_1 détermine sur t le point correspondant A. Les deux points A, A_1 jouent donc le même rôle l'un à l'égard de l'autre.

L'intersection C des deux droites t, t_1 est en même temps sa projection C_1. Ce point est quelquefois nommé le *point commun* des deux lignées.

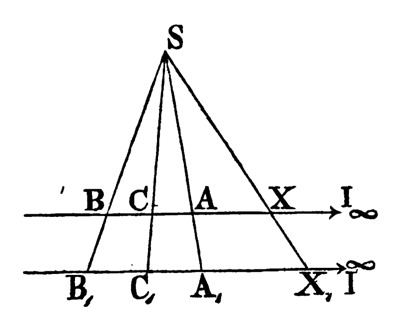
Le point infini de t sera généralement désigné par I. Le rayon projetant du point I est d'après notre convention (v. 3) une parallèle à t. L'intersection I_1 de cette parallèle avec t_1 est donc le point correspondant de I. Lorsque le rayon projetant parcourt successivement tous les points de t de manière à tendre de plus en plus vers le point infini I, son intersection avec t_1 s'approche en même temps de plus en plus d'une position limite I_1. De même si l'on désigne, comme nous le ferons communément, par J_1 le point infini de t_1, on obtient sur t et sur le rayon parallèle à t_1 un point J, qui sera le correspondant de J_1. Ces quatre points I, I_1, J, J_1 jouissent de propriétés importantes et seront appelés dans la suite les *points limites* des deux lignées.

Supposons qu'un rayon décrive en partant de SJ l'angle intérieur JSI_1 du parallélogramme JSI_1C, puis continue sa marche pour revenir à sa position initiale; il parcourra simultanément d'abord les parties JACBI et $J_1A_1C_1B_1I_1$ ensuite IXJ et $I_1X_1J_1$. Il y a donc dans les deux lignées quatre branches, que séparent les points limites et qui se correspondent une à une. Par conséquent, si un point B est situé sur la branche JA, c'est-à-dire du même côté que A par rapport au point limite J, le point correspondant B_1 sera pareillement sur la branche correspondante I_1A_1, ou si l'on veut du même côté que A_1 par rapport à I_1.

Cas particuliers. Le centre de projection S peut être à l'infini. Dans ce cas deux segments projectifs quelconques (AB),



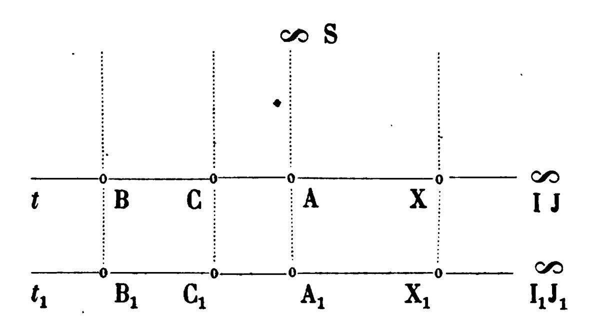
(A_1B_1) sont dans un rapport constant; de plus le rayon SI, qui joint le centre avec le point infini de t, a deux points S, I à l'infini, et par suite il se confond avec la droite infinie du plan : en conséquence, le point correspondant I_1 est pareillement à l'infini. Nous en pouvons dire autant lorsque les



lignées t, t_1 sont parallèles. Dans l'un et l'autre cas, les segments projectifs sont proportionnels, les deux points I, J_1 se correspondent et par conséquent les points limites se

trouvent tous à l'infini. C'est là ce qu'on appelle des *lignées semblables.*

Si le centre S est à l'infini et si, de plus, les droites t, t



sont parallèles, non seulement les points infinis se correspondent, et les segments projectifs sont proportionnels comme ci-dessus, mais encore il y a égalité entre ces segments. On dit alors que les lignées sont *égales.*

Nous faisons maintenant abstraction de la situation en perspective et admettons que l'on puisse déplacer les deux droites t, t_1 sans rien changer à la position relative des points d'une même droite, ni à la correspondance entre les points des deux lignées.

Détermination de deux lignées projectives. — 97. Deux lignées projectives t, t_1 sont complètement déterminées, quand on donne trois couples de points correspondants A, A_1, B, B_1, C, C_1 (v. 83). Il suffit, par conséquent, de connaître une paire A, A_1 et les points limites J, I_1, parce qu'alors, en tenant compte des points infinis I, J_1, on possède trois paires. On construit facilement avec la règle le point X_1 qui dans une lignée correspond à un point X de l'autre (v. 78).

RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS DE SIMPLE SECTION. — 98. Soient deux lignées projectives t, t_1 déterminées par trois paires de points correspondants A, A_1, B, B_1, C, C_1. Une quatrième paire X, X_1 doit satisfaire à la condition

$$(AXCB) = (A_1X_1C_1B_1)$$

donc on a

$$(6) \qquad \frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(AC)}{(CB)} = \frac{(A_1X_1)}{(X_1B_1)} : \frac{(A_1C_1)}{(C_1B_1)}$$

d'où

$$(7) \qquad \frac{(AX)}{(XB)} : \frac{(A_1X_1)}{(X_1B_1)} = \frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(A_1C_1)}{(C_1B_1)}$$

Si l'on remplace X par J et si l'on observe que

$$\frac{(A_1J_1)}{(J_1B_1)} = -1$$

parce que le point de division J_1 est à l'infini, on obtient

$$(8) \qquad \frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(A_1C_1)}{(C_1B_1)} = -\frac{(AJ)}{(JB)}$$

Des équations (7) et (8) résulte le théorème :

Dans deux lignées projectives le quotient de deux rapports de simple section correspondants $\frac{(AX)}{(XB)}$, $\frac{(A_1X_1)}{(X_1B_1)}$ *a une valeur constante, lors même que les points de division* X, X_1 *varient; et cette valeur constante est égale au rapport de simple section* $-\frac{(AJ)}{(JB)}$.

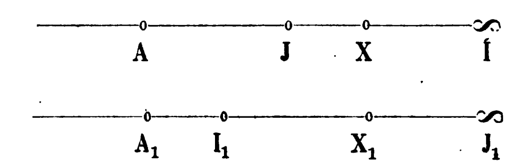
99. Si les points infinis se correspondent, c'est-à-dire si J est à l'infini, le rapport $\frac{(AJ)}{(JB)}$ est égal à -1, et par conséquent on a

$$(9) \qquad \frac{(AX)}{(XB)} = \frac{(A_1X_1)}{(X_1B_1)}$$

ou $$(10) \qquad \frac{(AX)}{(A_1X_1)} = \frac{(XB)}{(X_1B_1)}$$

Lorsque dans deux lignées projectives les points infinis se correspondent, il s'en suit que les segments projectifs sont proportionnels ; les lignées sont alors semblables. Si de plus deux segments projectifs sont égaux, il en est de même pour tous les autres, et les lignées sont égales.

Distances des points correspondants aux points limites. — 100. Les quatre points A, J, I, X et leurs correspondants



satisfont à l'équation

$$\frac{(AJ)}{(JX)} : \frac{(AI)}{(IX)} = \frac{(A_1J_1)}{(J_1X_1)} : \frac{(A_1I_1)}{(I_1X_1)}$$

mais chacun des rapports $\frac{(AI)}{(IX)}, \frac{(A_1J_1)}{(J_1X_1)}$ est égal à -1, donc on a

$$\frac{(AJ)}{(JX)} = \frac{(I_1X_1)}{(A_1I_1)}$$

d'où

$$(11) \qquad (XJ)\ (X_1I_1) = (AJ)\ (A_1I_1)$$

Donc, en regardant A, A_1 J, I_1 comme fixes et X, X_1 comme variables, on peut énoncer le théorème suivant :

Dans deux lignées projectives le produit des distances (XJ), (X_1I_1) *de deux points correspondants variables* X, X_1 *aux points limites respectifs* J, I_1 *a une valeur constante.*

101. Réciproquement, *lorsque dans deux lignées dont les points se correspondent un à un, le produit des distances de deux points correspondants quelconques* X, X_1 *à deux points fixes* J, I_1 *situées sur ces lignées a une valeur constante et de même signe les deux lignées sont projectives.*

Soient A, A_1 deux points correspondants; on aura, en vertu de l'hypothèse

$$(XJ)\,(X_1I_1) = (AJ)\,(A_1I_1)$$

Les points J, I_1 regardés comme points limites et A, A_1 comme correspondants déterminent deux lignées projectives (v. 97); appelons X_2 le point projectif de X. D'après le théorème précédent, il faut que

$$(XJ)(X_2I_1) = (AJ)(A_1I_1),$$

donc

$$(XJ)(X_2I_1) = (XJ)(X_1I_1)$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si X_2 coïncide avec X_1, ce qu'il fallait démontrer.

102. Il en résulte qu'étant donnés deux points correspondants A, A_1 dans deux lignées projectives t, t_1, si l'on prend de l'autre côté des points limites J, I_1 deux points X, X_1 situés à des distances égales en valeur absolue à celles de A, A_1, les points X, X_1 seront correspondants, car ils satisferont à la condition

$$(XJ)(X_1I_1) = (AJ)(A_1I_1)$$

Donc

Dans deux lignées projectives il y a symétrie par rapport aux points limites J, I_1. En d'autres termes, si l'on tourne autour du point limite J l'une des branches de t de manière à

ce qu'elle tombe sur l'autre et si l'on fait la même chose pour t_1, deux points quelconques qui coïncideront dans t auront pour correspondants deux points qui coïncideront également.

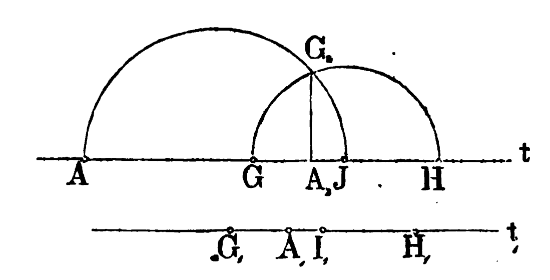
Caractéristique des lignées projectives. — 103. Le produit constant $(XJ)(X_1I_1)$ des distances de deux points correspondants aux points limites J, I_1 sert à déterminer numériquement deux lignées projectives, abstraction faite de leur position dans l'espace. En effet, si ce produit est le même pour t, t_1 et pour s, s_1, la première lignée t étant superposée sur s et la seconde t_1 sur s_1 de manière à ce que les points limites coïncident, il faudra, en vertu de l'hypothèse, que deux points quelconques superposés de t et s aient pour correspondants deux points superposés de t_1 et s_1.

Si les points infinis se correspondent le produit $(XJ)(X_1I_1)$ est alors infini et ne peut pas en conséquence servir de caractéristique. Les lignées, étant alors semblables, sont déterminées par la valeur du rapport constant $\frac{(AX)}{(A_1X_1)}$ des segments projectifs (v. 99).

Points des segments nuls. — 104. Généralement dans les lignées non semblables, les distances de deux points correspondants aux points limites J, I_1 sont différentes. Toutefois pour deux paires de points ces distances sont égales entre elles. La construction de ces points peut s'effectuer comme suit :

Superposez les deux lignées l'une sur l'autre de manière à ce que I_1 coïncide avec J et que A_1 tombe du côté de A en A_1; construisez un cercle sur le segment des points extérieurs A, J comme diamètre, puis menez une perpendiculaire à la droite

AJ par le troisième point A_2. La distance du point J à l'intersection G_2 de la perpendiculaire avec le cercle est la distance



cherchée : en la portant sur les deux lignées de part et d'autre des points limites, on obtiendra de la sorte quatre points. Nous désignerons généralement par G et G_1 les deux points situés sur deux branches correspondantes et par H et H_1 les deux autres.

Il est évident que G et G_1 sont projectifs; car, d'après un théorème de géométrie élémentaire, la corde (G_2J) est moyenne proportionnelle entre le diamètre (AJ) et sa projection (A_2J) sur le diamètre; en d'autres termes on a

$$(G_2J)(G_2J) = (AJ)(A_2J)$$

donc

$$(GJ)\,(G_1I_1) = (AJ)(A_1I_1)$$

On en conclut que G et G_1 sont correspondants (v. 101); de même pour H et H_1.

Ces points G, H, G_1, H_1 jouissent de plusieurs propriétés remarquables et reçoivent pour une raison que nous allons bientôt voir, le nom de *points des segments nuls.*

Segments projectifs égaux. — 105. Soient deux lignées t, t_1 déterminées par les points A, J, A_1, I_1. L'équation (11)

donne la proportion : $(AJ) : (I_1X_1) = (XJ) : (I_1A_1)$; or la différence des antécédents est à la différence des conséquents comme un antécédent est à son conséquent :

$$(AJ)-(XJ) : (I_1X_1)-(I_1A_1) = (AJ) : (I_1X_1) = (XJ) : (I_1A_1)$$

ou

$$(AJ)+(JX) : (A_1I_1)+(I_1X_1) = (AJ) : (I_1X_1) = (XJ) : (I_1A_1)$$

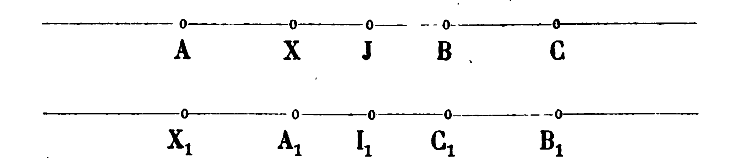
donc

$$(12) \quad (AX) : (A_1X_1) = (AJ) : (I_1X_1) = (XJ) : (I_1A_1)$$

En conséquence, si l'on prend sur t un point X tel que (XJ) soit égal à p fois (I_1A_1), le segment (AX) sera pareillement égal à p fois sa projection (A_1X_1). Nous pourrons donc résoudre le problème suivant :

Etant données deux lignées projectives t, t_1 et une paire de points correspondants A, A_1, *trouver un point* X *tel que le segment* (AX) *soit égal à sa projection* (A_1X_1).

Il suffit de porter sur t du même côté que A par rapport à J une longueur (XJ) égale à (I_1A_1). On peut, sans employer



l'un des procédés vus plus haut (v. 78), construire le point X_1. En effet, la proportion (12) montre que $(AJ) = (I_1X_1)$ si $(AX) = (A_1X_1)$. On portera donc pareillement sur t_1 du côté de A_1 une longueur (I_1X_1) égale à (AJ). Les deux points obtenus X, X_1 sont correspondants, puisqu'ils satisfont à la condition $(XJ)(X_1I_1) = (AJ)(A_1I_1)$, et de plus les segments projectifs (AX), (A_1X_1) sont égaux.

Si l'on prend sur l'autre branche de t une longueur (BJ) égale à (A_1I_1) et sur l'autre branche de t_1 une longueur (B_1I_1) égale à (AJ), on obtiendra une nouvelle paire de points correspondants, puisque (BJ) (B_1J_1) = (AJ) (A_1I_1); en outre (AB)=(A_1B_1). Il y aurait donc une seconde paire de points B, B_1 formant avec la paire donnée A, A_1 des segments égaux; mais nous remarquerons que si, dans la position de perspective, le rayon projetant parcourt la partie (AB), il parcourt simultanément non pas (AB), mais toute la droite t_1 hormis ce segment. De pareils segments dont les extrémités seules sont projectives et qui comprennent les points limites peuvent être appelés *segments négativement projectifs.*

Nous concluons de ce qui précède la propriété suivante :

Lorsque dans deux lignées projectives on donne une paire de points correspondants A, A_1, *et que les points limites ne sont pas à l'infini, il est toujours possible de déterminer une seconde paire* X, X_1 *telle que les segments* (AX), (A_1X_1) *soient projectifs et égaux ; il est encore possible de déterminer une troisième paire* B, B_1 *telle que les segments* (AB), (A_1B_1) *soient égaux, mais négativement projectifs.*

Vu la symétrie dans la correspondance des deux branches de t avec les deux branches de t_1, il est clair que, si l'on fait du côté de B la longueur (CJ) = (AJ) et du côté de B_1 la longueur (C_1I_1) = (A_1J_1), les points C et C_1 seront correspondants, et de plus (BC) = (B_1C_1). Donc on a des deux côtés des points limites deux segments (AX), (BC) égaux entre eux et à leurs projections. Remarquons encore qu'on obtient aussi deux segments (CX), (C_1X_1) égaux à (AB) et (A_1B_1), mais négativement projectifs comme ces derniers.

106. Si l'on cherche quelle est la seconde paire de points

qui avec G, G_1 (v. 104) terminent des segments projectifs égaux, on trouve les mêmes points G, G_1; les segments, dans ce cas, sont nuls. Il en est de même pour la paire H, H_1. Voilà pourquoi ces points ont été nommés points des segments nuls. En revanche, les deux points qui avec J, J_1 forment des segments projectifs égaux se trouvent être les points infinis.

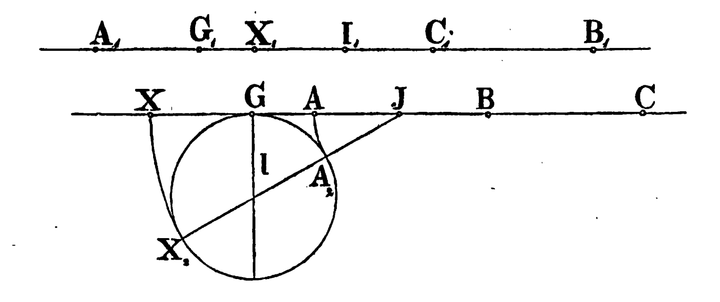
Les extrémités non correspondantes A_1, X de deux segments projectifs égaux satisfont à la condition $(XJ) = (I_1A_1)$; donc le produit (AJ)(XJ) est égal au produit constant$(AJ)(A_1I_1)$ ou à (GJ)(GJ). Donc les deux extrémités A, X doivent être situées de part et d'autre du point G des segments nuls qui se trouve sur la même branche.

Une relation analogue existe entre les extrémités A, B d'un segment qui est égal à sa projection négative (A_1B_1). Si (AJ) est moindre que (GJ), en revanche (BJ) sera plus grand que (GJ).

107. Pour terminer ce sujet, nous nous proposons de résoudre le problème :

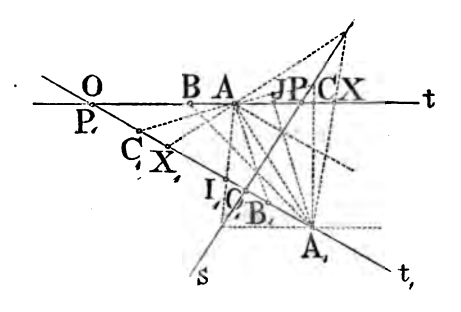
Etant données deux lignées projectives t, t_1, trouver deux points tels que le segment compris entre ces points, ainsi que sa projection soient égaux l'un et l'autre à une longueur l.

Tracez un cercle qui soit trangent à l'un des points des



segments nuls G, et dont le diamètre soit égal à l. Menez une droite par J et le centre, elle coupera la circonférence en deux points X_2, A_2. Si vous prenez sur t d'un même côté de J les longueurs (JA) et (JX) égales à (JA_2) et (JX_2), les points A, X seront les points cherchés. En effet, (AJ)(XJ)=(GJ)(GJ) donc A, X sont les extrémités d'un segment qui est égal à sa projection. De plus $(AX) = (A_2X_2) = l$. On peut aussi porter les longueurs (JA_2), (JX_2) sur l'autre branche, ce qui donne une seconde réponse.

Axe projectif. — 108. Soient t, t_1 deux lignées projectives situées dans un même plan. Joignons par des droites le point A_1 avec les points A, B, C, X puis le point A avec les correspondants A_1, B_1, C_1, X_1. Les faisceaux A_1A, A_1B, A_1C, A_1X et AA_1, AB_1, AC_1, AX_1 composés chacun de quatre rayons



ont respectivement les mêmes biquotients que les lignées A, B, C, X et A_1, B_1, C_1, X_1, avec lesquelles ils sont en perspective; donc ils ont des biquotients égaux. De plus deux rayons correspondants A_1A, AA_1 coïncident. Si donc on appelle s la droite menée par l'intersection de AB_1 avec A_1B et par celle de A_1C avec AC_1, il faudra que A_1X et AX_1 se coupent sur cette droite s (v. 67).

Soient O et P_1 les points qui dans les deux lignées t, t_1 sont

superposés. Puisque A_1O et AO_1 se coupent sur s, il faut que AO_1 passe par l'intersection de A_1O avec s; il en résulte que cette intersection est elle-même le point O_1. Pour une raison analogue, l'intersection de s avec AO détermine le point P. Ainsi s rencontre les deux lignées dans les points qui correspondent à leur intersection.

Cela posé, on voit que si l'on projette de deux autres points correspondants quelconques C, C_1 les deux lignées t, t_1, on obtiendra deux faisceaux en situation de perspective; et pour la même raison que ci-dessus, l'axe de perspective devra passer par les points fixes O_1, P; c'est donc encore la même droite s. Ainsi lorsque deux lignées sont projectives et situées dans un plan, les intersections de deux droites comme A_1B, AB_1, ou C_1X, CX_1, etc., se trouvent sur une droite fixe s, que nous appelons *l'axe projectif* des deux lignées.

Il en résulte que, si l'on donne trois paires de points A, A_1, B, B_1, C, C_1 de deux lignées projectives, on peut facilement construire le point X de l'une correspondant à un point quelconque X_1 de l'autre. On détermine d'abord deux des intersections de AB_1 avec A_1B, de AC_1 avec A_1C et de BC_1 avec B_1C. On mène par ces intersections la droite s ; ensuite on joint le point donné X_1 avec un point quelconque C de l'autre lignée, pourvu qu'on en connaisse déjà le correspondant. La droite menée par l'intersection de X_1C avec s et par le point correspondant C_1 doit nécessairement couper t au point cherché X.

On peut par le même procédé construire les deux points J, I_1, qui correspondent aux infinis. Or, d'après la propriété précédente, l'intersection des deux droites I_1J et IJ_1 doit être

sur s; mais, puisque IJ_1 a deux points I et J_1 à l'infini, elle est la droite infinie du plan; donc I_1J ne saurait la rencontrer qu'à l'infini; l'intersection des trois droites I_1J, IJ_1, s étant à l'infini, il s'en suit que s est parallèle à I_1J. Donc :

Lorsque deux lignées sont projectives et situées dans un même plan, l'intersection des deux droites AB_1, A_1B, *qui vont de deux points quelconques de la première lignée aux points correspondants, pris inversement, est toujours sur une droite fixe s, qui est parallèle à la droite* I_1J *menée par les points limites et rencontre les deux lignées dans les points* O_1,P *correspondants à leur intersection (*O ou P_1*).*

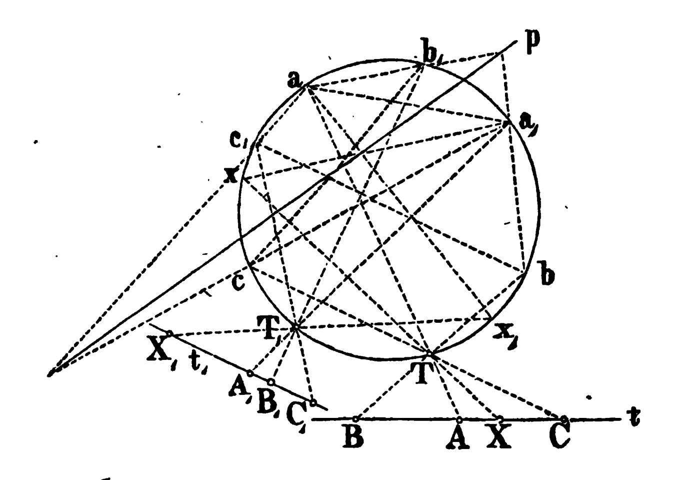
109. Si l'on désigne par (AB_1, A_1B) le point commun aux deux droites AB_1 et A_1B, on pourra, en employant cette notation, énoncer le corollaire suivant :

Etant données dans un même plan deux lignées de trois points chacune A, B, C, A_1, B_1, C_1, *les trois points* (AB_1, A_1B), (BC_1, B_1C), (CA_1, C_1A) *sont sur une droite s.*

Projections de deux lignées sur un cercle. — 110. Soient dans un plan deux lignées projectives t, t_1 et deux points T, T_1 sur la circonférence d'un cercle. De T projetez sur la circonférence la lignée A, B, C, X..., en a, b, c, x..., et de T_1 les points A_1, B_1, C_1, X_1... en a_1. b_1, c_1, x_1... Vu l'égalité des angles correspondants, le biquotient $a(a_1b_1c_1x_1)$ est égal à $T_1(a_1b_1c_1x_1)$* et par conséquent à $(A_1B_1C_1X_1)$; de même $a_1(abcx)=(ABCX)$; et comme $(ABCX)=(A_1B_1C_1X_1)$, il en résulte que $a(a_1b_1c_1x_1) = a_1(abcx)$. En outre, les rayons correspondants aa_1, a_1a coïncident; donc les deux

* Nous représentons par $T_1(a_1b_1c_1x_1)$ le biquotient des quatre rayons T_1a_1, T_1b_1, T_1c_1, Tx_1.

faisceaux formés autour des points a, a_1 sont perspectifs et par suite les intersections (ab_1, a_1b), (ac_1, a_1c), (ax_1, a_1x),....



sont situées sur une même droite *p*.

On peut encore démontrer que les droites bc_1, b_1c menées de deux projections quelconques b, c, aux points homologues b_1, c_1 pris inversement, se rencontrent toujours sur cette ligne *p*. En effet, $b(a_1b_1c_1a_1) = c(a_1b_1c_1a_1)$, puisque les angles correspondants sont égaux; si l'on coupe le premier faisceau par ab_1 et le second par ac_1, on obtient les lignées

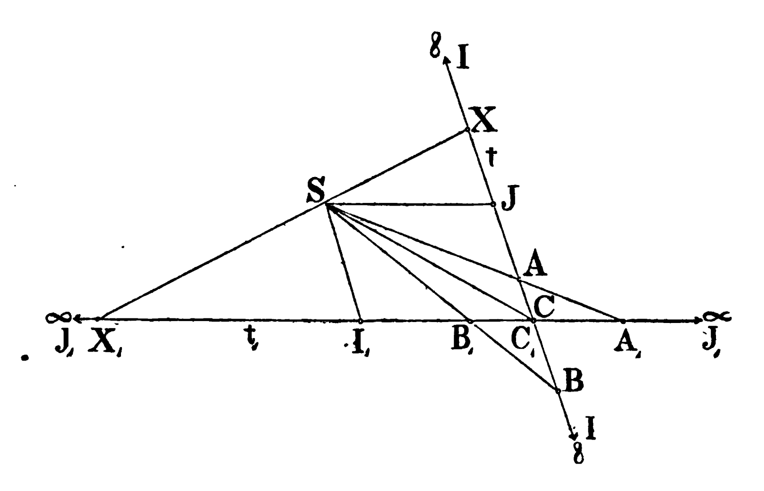
(ab_1, ba_1)	b_1	(ab_1, bc_1)	a
(ac_1, ca_1)	(ac_1, cb_1)	c_1	a

qui sont perspectives. Donc les droites *p*, b_1c, bc_1 menées par les éléments correspondants concourent en un point. D'où le théorème :

Si l'on projette deux lignées projectives t, t_1, sur la circonférence d'un cercle à partir de deux points T, T_1 *situés sur cette dernière, les droites* bc_1, b_1c *qui joignent deux points* b, c

de la circonférence avec leurs homologues b_1, c_1 *pris inversement se rencontrent toujours sur une même droite p.*

Situation en perspective. — **111.** Deux lignées projectives t, t_1 sont en perspective, lorsque trois paires de points



correspondants sont déjà dans cette situation (v. 84). La dite condition est remplie, si deux points correspondants C, C_1 coïncident; car on a trois paires de points A, A_1, B, B_1, C, C_1 en perspective depuis le point de concours de AA_1 avec BB_1.

Le centre de perspective S est à l'intersection des droites JJ_1, II_1. Or $(SI_1) = (CJ)$, et $(SJ) = (CI_1)$. Si donc l'une des lignées t tourne autour du point commun C sans sortir du plan $t t_1$, les deux lignées seront encore en perspective, puisque deux points correspondants C, C_1 coïncident; de plus (SI_1) reste toujours égal à (CJ). Donc

Deux lignées t, t_1 sont en situation de perspective, lorsqu'elles sont projectives et qu'en outre deux points correspondants C, C_1. *coïncident. Si l'on tourne l'une d'elles t autour*

du point commun C, *les deux lignées restent en perspective, et le centre* S *décrit un cercle autour du point limite* I_1 *de la lignée fixe. Le rayon de ce cercle est égal à la distance* (CJ) *du point commun* C *à l'autre point limite* J.

EQUATION ENTRE DEUX LIGNÉES PROJECTIVES. — **112.** Soient deux lignées projectives t, t_1 déterminées par trois paires de points correspondants variables. Si l'on désigne par a, b, c, x

t: K G B J A Y H C X

t_1: B_1 G_1 L_1 I_1 X_1 C_1 H_1 Y_1 A_1

les distances respectives des points A, B, C, X à une origine fixe K prise sur t et par a_1, b_1, c_1, x_1 celles de A_1, B_1, C_1, X_1 à une autre origine L_1 située sur t_1, les deux lignées seront liées entre elles par l'équation (v. 87)

$$(13) \qquad mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

On en déduit la valeur de x_1 au moyen de celle de x

$$(14) \qquad x_1 = -\frac{nx+q}{mx+p}$$

et vice-versâ.

113. Le segment formé par deux points X,Y de la première lignée t est toujours

$$(XY) = (XK)+(KX) = -(KX)+(KY) = -x+y$$

Soit l la longueur du segment (XY), d'où

$$(15) \qquad y = x + l$$

De même le segment projectif sera

$$(X_1Y_1) = (X_1L_1)+(L_1Y_1) = -(L_1X_1)+(L_1Y_1) = -x_1+y_1$$

ou, en remplaçant x_1, y_1 par leurs valeurs données par les équations (14) et (15),

$$\frac{nx+q}{mx+p} - \frac{n(x+l)+q}{m(x+l)+p}$$

Or on peut déterminer x de telle manière que cette expression ait une valeur donnée. Un cas particulier est celui où

$$(X_1Y_1) = \pm l$$

On pose alors

$$\frac{nx+q}{mx+p} - \frac{n(x+l)+q}{m(x+l)+p} = \pm l$$

Si le second membre a le signe +, les deux segments (XY), (X_1Y_1) sont projectifs et égaux. Dans ce cas l'équation peut s'écrire

$$(16) \qquad l = \frac{(mx+p)^2+(np-qm)}{-m(mx+p)}$$

Si, au contraire, on fait $(X_1Y_1) = -l$, les deux segments sont égaux, mais négativement projectifs, et l'équation devient

$$(17) \qquad l = \frac{(mx+p)^2-(np-qm)}{-m(mx+p)}$$

La valeur de l donnée par l'équation (16) est infinie, si le dénominateur du second membre s'annule, c'est-à-dire si $x = -\frac{p}{m}$. Le point en question n'est pas autre chose que le point limite J (v. 106), de sorte qu'on a pour (KJ) ou j la relation

$$(18) \qquad j = -\frac{p}{m}$$

Vu la symétrie, on aurait de même pour (L_1I_1) ou i_1

$$(19) \qquad i_1 = -\frac{n}{m}$$

En revanche, le segment l donné par l'équation (16) est nul, quand le numérateur du second membre est égal à zéro, c'est-à-dire quand $x = -\frac{p}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{pn-qm}$.

Ce sont donc les valeurs qui donnent les points des segments nuls G, H. Ainsi l'on a

$$(KG) = g = -\frac{p}{m} + \frac{1}{m}\sqrt{pn-qm}$$

$$(KH) = h = -\frac{p}{m} - \frac{1}{m}\sqrt{pn-pm}$$

(20) et de même

$$(L_1G_1) = g_1 = -\frac{n}{m} + \frac{1}{m}\sqrt{pn-qm}$$

$$(L_1H_1) = h_1 = -\frac{n}{m} - \frac{1}{m}\sqrt{pn-qm}$$

La distance (GJ) est égale à (GK)+(KJ) ou à —(KG)+(KJ) et par suite à $-\frac{1}{m}\sqrt{pn-qm}$. Donc la caractéristique $(XJ)(X_1I_1)$ ou $(GJ)^2$ des deux lignées t, t_1 a pour valeur $\frac{pn-qm}{m^2}$.

114. L'équation (13) contient quatre termes sous sa forme générale; mais elle peut être ramenée à un plus petit nombre de termes par un choix convenable des origines K, L_1 ou suivant la nature des lignées.

1° Lorsque les origines sont deux points correspondants, l'équation (13) doit être satisfaite, quand on fait dans le pre-

mier membre $x = 0$, et $x_1 = 0$; il faut alors que le terme connu q soit nul. L'équation se réduit dans ce cas à

$$mxx_1 + nx + px_1 = 0$$

2° Si l'une des origines est au point limite J l'équation sera satisfaite quand on y remplace x par 0 et x_1 par ∞, c'est-à-dire $\frac{1}{x_1}$ par 0. Si donc on divise préalablement (13) par x_1 et si l'on fait $x = 0$, $\frac{1}{x_1} = 0$, on voit que $p = 0$; l'équation est donc alors

$$mxx_1 + nx + q = 0$$

3° Pour une raison analogue, le coefficient n est nul, quand l'une des origines est au point I_1, de sorte que l'équation est dans ce cas

$$mxx_1 + px_1 + q = 0$$

4° Si les points infinis se correspondent, l'équation (13), préalablement divisée par xx_1, doit être satisfaite quand on y remplace $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x_1}$ par zéro, d'où résulte que m est alors nul; pour les lignées semblables l'équation est donc

$$nx + px_1 + q = 0$$

Tels sont les cas où la relation qui existe entre les longueurs x, x_1 est exprimée par une équation à trois termes.

5° L'équation ne contiendra que les deux termes

$$mxx_1 + q = 0$$

quand on prendra pour origines les deux points limites J, I_1, puisqu'alors les coefficients n et p s'annulent.

6° Enfin pour les lignées semblables, l'équation se réduit pareillement aux deux termes

$$nx + px_1 = 0$$

quand on prend pour origines deux points correspondants.

115. Nous avons déjà démontré que s'il existe, entre les segments x, x_1 formés par deux points correspondants quelconques de deux lignées t, t_1 et deux origines prises sur ces lignées, une relation exprimée par une équation de la forme

$$mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

les deux lignées doivent être projectives (v. 89).

Quand le coefficient m est nul, les lignées sont semblables, car l'équation, divisée préalablement par xx_1, est satisfaite pour $\frac{1}{x} = 0$, $\frac{1}{x_1} = 0$; en d'autres termes les les points infinis se correspondent.

Lorsque n est nul, l'équation, après avoir été divisée par x, est vérifiée par les valeurs $x_1 = 0$, $\frac{1}{x} = 0$, donc l'origine sur t_1 est le point limite I_1.

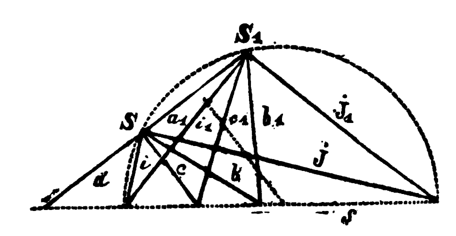
Si p est nul, l'équation divisée par x_1 est satisfaite par les valeurs $x = 0$, $\frac{1}{x_1} = 0$; donc l'origine sur t est le point limite J.

Enfin, si q est nul, le premier membre de l'équation s'annule, quand on fait $x = 0$, $x_1 = 0$, donc les deux origines sont alors en des points correspondants.

Deux faisceaux projectifs en général.

Les propriétés fondamentales de deux faisceaux projectifs peuvent se déduire de celles des lignées projectives, grâce au principe de la corrélation dans le plan.

GÉNÉRATION DE DEUX FAISCEAUX PROJECTIFS. — **116.** Si l'on unit chaque point d'une droite *s* (axe de perspective)



avec deux points fixes S, S_1 au moyen de droites, l'ensemble des rayons autour de S forme le faisceau S; de même l'ensemble des rayons autour de S_1 constitue le faisceau S_1. De plus, les faisceaux sont en situation de perspective (v. 37). S'ils ne se trouvent pas dans un même plan, il est permis, sans rien changer à la position relative des éléments d'un même faisceau, de tourner l'un des plans autour de l'axe *s* jusqu'à ce que les deux plans coïncident. Ce mouvement ne détruit pas la position de perspective. Nous pouvons donc supposer que les deux faisceaux sont situés dans un même plan.

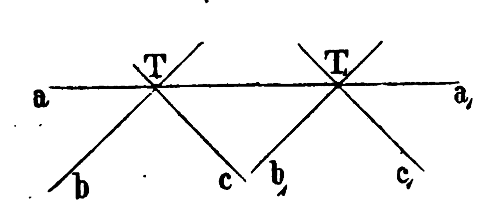
Le rayon *a* qui joint les deux sommets est aussi son rayon correspondant a_1, on pourra l'appeler le *rayon commun* des deux faisceaux.

Menez un cercle dont la circonférence passe par les deux sommets S, S_1 et dont le centre soit sur l'axe *s*. Soient *i*, i_1 les deux rayons qui concourent en l'un des points d'inter-

section de la circonférence et de l'axe, et soient pareillement j, j_1 ceux qui concourent en l'autre point. Il est évident que i correspond à i_1 et j à j_1. Les deux rayons i, j, forment un angle droit et partagent ainsi le faisceau S en deux moitiés; il en est de même pour la paire i_1, j_1. Lorsqu'un rayon mobile décrit l'une des moitiés (ij), le rayon correspondant décrit pareillement la moitié correspondante (i_1j_1). Donc quand un élément b se trouve dans l'angle (ij), l'élément projectif b_1 doit être situé dans l'angle (i_1j_1). Les droites i, i_1, j, j_1, divisent conséquemment les deux faisceaux en moitiés qui se correspondent une à une et seront appelées *rayons limites.*

Plusieurs cas spéciaux peuvent se présenter :

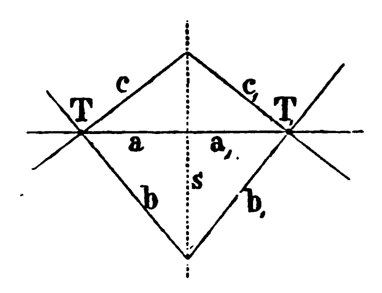
1° Si l'axe de perspective s est à l'infini, les rayons projectifs b, b_1 sont parallèles, et par suite les angles correspondants (bc), (b_1c_1), ont une même valeur : les deux faisceaux



sont dits *égaux.* Dans ce cas, à deux rayons rectangulaires quelconques b, c correspondent deux rayons b_1, c_1 qui se coupent pareillement à angle droit; il y a donc alors une infinité de rayons limites.

2° Si l'axe de perspective est perpendiculaire sur le milieu de (TT_1), tout angle formé par deux rayons b, c de l'un des systèmes T sera égal à l'angle correspondant (b_1c_1); mais on remarquera que si le rayon a décrit le faisceau T dans

un sens, le rayon correspondant a_1 parcourt le faisceau T_1 dans le sens contraire. En d'autres termes, les angles correspondants (bc), (b_1c_1),... ont des signes différents, si l'on



admet dans les deux systèmes un même sens comme positif. Les deux faisceaux projectifs en question seront dits *négativement égaux*. Dans ce cas, si deux rayons b, c sont perpendiculaires, leurs correspondants le seront aussi; il y a donc encore une infinité de rayons limites.

3° Si l'un des sommets T est à l'infini, les droites qui concourent en ce point doivent être parallèles. Deux rayons ne peuvent en conséquence être perpendiculaires l'un à l'autre; il n'y a donc pas de rayons limites réels dans ce cas.

Détermination des faisceaux projectifs. — 117. Deux faisceaux projectifs sont déterminés, lorsque trois couples de rayons correspondants sont donnés (v. 83). Ils seront donc pareillement déterminés, quand on connaîtra une paire a, a_1 et un rayon limite de chaque faisceau avec leurs désignations; car alors on peut en déduire les deux autres rayons limites.

Le rayon x_1 qui correspond à un rayon donné x peut être construit d'après la méthode indiquée précédemment (v. 79).

Relations entre les angles projectifs. — 118. Soient

deux faisceaux projectifs T, T_1 déterminés par trois paires de rayons correspondants a, a_1, b, b_1, c, c_1. Une quatrième paire x, x_1 doit satisfaire à la condition

$$(axcb) = (a_1x_1c_1b_1)$$

donc on a

$$(21)\quad \frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)} : \frac{\text{Sin}(ac)}{\text{Sin}(cb)} = \frac{\text{Sin}(a_1x_1)}{\text{Sin}(x_1b_1)} : \frac{\text{Sin}(a_1c_1)}{\text{Sin}(c_1b_1)}$$

d'où

$$\frac{\text{Sin}(ax)}{\text{Sin}(xb)} : \frac{\text{Sin}(a_1x_1)}{\text{Sin}(x_1b_1)} = \frac{\text{Sin}(ac)}{\text{Sin}(cb)} : \frac{\text{Sin}(a_1c_1)}{\text{Sin}(c_1b_1)}$$

c'est-à-dire

Dans deux faisceaux projectifs le quotient de deux rapports de simple section correspondants a une valeur constante, lors même que les éléments de division x, x_1 varient.

Angles formés par les rayons correspondants avec les rayons limites. — **119.** Si dans l'équation (21), on remplace a, b, c respectivement par i, j, a, on a

$$\frac{\text{Sin}(ix)}{\text{Sin}(xj)} : \frac{\text{Sin}(ia)}{\text{Sin}(aj)} = \frac{\text{Sin}(i_1x_1)}{\text{Sin}(x_1j_1)} : \frac{\text{Sin}(i_1a_1)}{\text{Sin}(a_1j_1)}$$

mais la somme des deux angles (ix), (xj) est égale à (ij), c'est-à-dire à un droit, donc le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre; et par suite le rapport $\frac{\text{Sin}(ix)}{\text{Sin}(xj)}$ peut s'écrire Tang (ix) ou $\frac{1}{\text{Tang}\,(xj)}$; la même observation peut être faite à l'égard des autres rapports de l'équation ci-dessus, qui par conséquent devient

$$(22)\quad \text{Tang}(ix) : \text{Tang}(i_1x_1) = \text{Tang}(ia) : \text{Tang}(i_1a_1)$$

ou

$$(23)\quad \text{Tang}(xi).\ \text{Tang}(x_1j_1) = \text{Tang}(ai).\ \text{Tang}(a_1j_1)$$

ou bien encore

$$(24) \quad \mathrm{Tang}(xj).\ \mathrm{Tang}(x_1 i_1) = \mathrm{Tang}(aj).\ \mathrm{Tang}(a_1 i_1)$$

En d'autres termes

Dans deux faisceaux projectifs le rapport des tangentes des angles que forment deux rayons correspondants variables avec deux rayons limites correspondants a une valeur constante, ainsi que le produit des tangentes des angles formés par deux rayons projectifs variables x, x_1 avec deux rayons limites non correspondants.

120. Réciproquement, *lorsque dans deux faisceaux dont les rayons se correspondent deux à deux, le produit des tangentes des angles que forment deux rayons correspondants quelconques x, x_1 avec deux rayons fixes i, j_1 a une valeur constante, les deux faisceaux sont projectifs.*

La démonstration est la traduction de celle du théorème 89, avec cette seule différence qu'il faudra remplacer les segments par des tangentes.

On en conclut aussi comme pour les lignées qu'il y a symétrie par rapport aux rayons limites dans la correspondance des deux moitiés d'un faisceau (les angles droits compris entre les rayons limites) avec les deux moitiés d'un autre faisceau projectif.

Rayons des angles nuls. — **121.** Les angles que forment deux rayons correspondants avec deux rayons limites non correspondants sont généralement inégaux. Deux paires de rayons font toutefois exception. En effet, l'angle dont le carré de la tangente est égal au produit constant

$$\mathrm{Tang}\ (ai).\ \mathrm{Tang}\ (a_1 j_1)$$

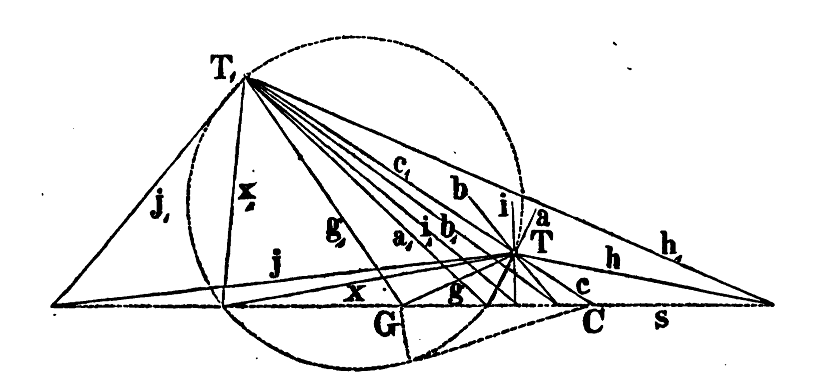
donne, quand on le porte à partir des rayons limites i et j_1 dans deux moitiés correspondantes, deux rayons g, g_1 qui sont projectifs, puisque par construction

$$\mathrm{Tang}(gi).\ \mathrm{Tang}\ (g_1 j_1) = \mathrm{Tang}(ai).\ \mathrm{Tang}(a_1 j_1).$$

En outre, ces rayons g, g_1 forment évidemment des angles égaux avec les rayons limites non correspondants. Si l'on porte ensuite l'angle obtenu à partir des rayons limites i et j_1 mais dans les deux autres moitiés correspondantes, on obtient une nouvelle paire de rayons h, h_1 ayant les mêmes propriétés que g et g_1. Ces quatre rayons g, g_1, h, h_1 seront appelés *rayons des angles nuls* (pour la construction voyez le § suivant).

ANGLES PROJECTIFS ÉGAUX. — **122.** Etant donnés deux faisceaux projectifs T, T_1 et une paire de rayons correspondants a, a_1 trouver un rayon x tel que l'angle (ax) soit égal à sa projection (a_1x_1).

On peut placer les deux faisceaux, de manière à ce que a



coïncide avec a_1. Les deux rayons parrallèles à l'axe de perspectives sont les droites cherchées x, x_1,

On peut aussi faire un angle (xj) égal à (a_1i_1) et $(x_1i_1)=(aj)$, en ayant soin toutefois que les angles se trouvent dans les angles droits correspondants. Les angles (ax), (a_1x_1) seront

égaux par construction; de plus, ils seront projectifs, puisque $tg(xj).\ tg(x_1 i_1) = tg(aj).\ tg(a_1 i_1)$.

Chaque rayon a est donc un côté d'un angle (ax) qui est égal à sa projection. Si a est en i ou j, l'angle est (ij). Si a est en g ou h, l'angle est nul : d'où la qualification de *rayons des angles nuls*.

Si l'on porte sur les deux autres moitiés correspondantes, un angle $(bj) = (a_1 i_1)$ et $(b_1 i_1) = (aj)$, les deux rayons b, b_1 seront également correspondants, puisqu'on a

$$\text{Tang}(bj).\ \text{Tang}(b_1 i_1) = \text{Tang}(aj).\ \text{Tang}(a_1 i_1)$$

de plus l'angle $(ab) = (a_1 b_1)$, mais ces deux angles ne sont pas projectifs, car si un rayon décrit l'angle (ab), le rayon correspondant décrit la partie extérieure à l'angle $(a_1 b_1)$. Les deux angles (ab), $(a_1 b_1)$, dont les côtés sont projectifs et qui renferment des rayons limites, seront appelés *angles négativement projectifs*.

En troisième lieu, on peut placer les deux faisceaux de telle manière que deux rayons quelconques correspondants c, c_1 coïncident. Le cercle mené par les sommets T, T_1 et par le point d'intersection de a avec l'axe s coupe cet axe en un second point par où passe x. Les rayons a_1, x_1 se coupent naturellement avec a et x sur l'axe, et la figure montre que les angles (ax), $(a_1 x_1)$ sont égaux.

En général, tout cercle qui passe par les deux sommets coupe l'axe de perspective en deux points, et les rayons menés par ces points forment des angles égaux. Un cas particulier est celui où le cercle est tangent à l'axe ; les deux rayons se confondent en un seul, et par conséquent l'angle est nul : on obtient ainsi les rayons g, g_1. Le point de contact G peut s'obtenir aisément. En effet, si l'on appelle C l'intersection

des rayons coïncidants c, c_1 avec l'axe s, on voit que CG est une moyenne proportionnelle entre CT et CT_1 ; on portera donc de part et d'autre du point G une longueur égale à la tangente menée du point C à l'un des cercles passant par T et T_1, puis l'on mènera aux extrémités les rayons g, g_1, h, h_1.

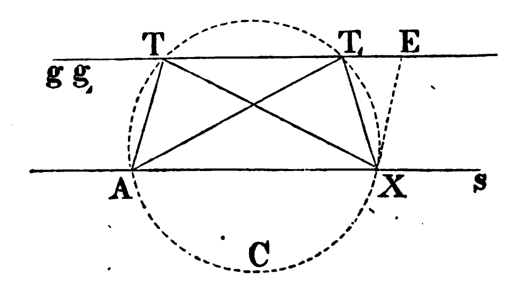
De ce qui précède résulte le théorème suivant :

Lorsque dans deux faisceaux projectifs on donne une paire de rayons correspondants a, a_1, il est toujours possible de déterminer une seconde paire x, x_1 telle que les angles (ax), (a_1x_1) soient projectifs et égaux. Il est encore possible de déterminer une troisième paire b, b_1 telle que les angles (ab), (a_1b_1) soient égaux, mais négativement projectifs.

On démontrerait comme pour les lignées que les rayons a et x sont situés de part et d'autre des rayons g ou h, ainsi que les rayons a et b.

123. *Dans deux faisceaux projectifs trouver deux rayons tels que l'angle compris entre eux, ainsi que sa projection soient égaux l'un et l'autre à un angle donné.*

Plaçons les deux faisceaux de manière à ce que deux rayons des angles nuls g, g_1 coïncident; l'axe de perspective s

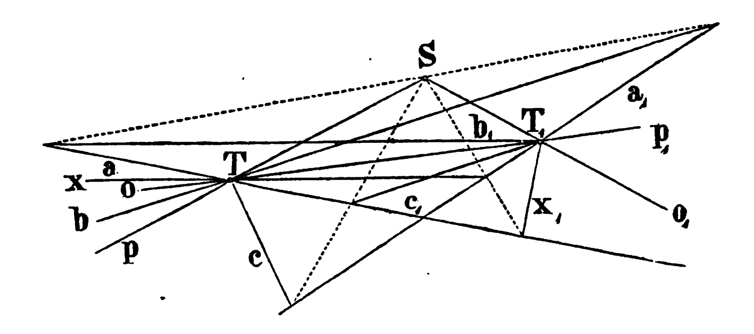


étant parallèle aux rayons correspondants qui avec les rayons superposés g, g_1 forment des angles égaux, doit être parallèle

à g. Si l'on pouvait décrire un cercle qui passât par les deux sommets T, T_1 et dont l'arc ACX intercepté par l'axe fût capable de l'angle donné, les droites TA, TX, T_1A, T_1X seraient les rayons cherchés. Supposons le cercle tracé et menons au point X la tangente XE. Or, la longueur du segment (XE) est connue; de plus, le carré de (XE) est égal au rectangle formé avec (TE) et (T_1E). La différence (TT_1) de ces deux derniers étant donnée, nous pourrons facilement construire (TE). Une droite formant en E avec TT_1 un angle égal à l'angle donné détermine le point X et par conséquent le cercle.

Les rayons TA, TX, T_1A, T_1X forment une solution; mais il y en a encore une seconde : pour l'obtenir, il suffit de prendre les rayons symétriques des précédents par rapport aux rayons limites.

Centre projectif. — **124.** Soient deux faisceaux projectifs T, T_1 situés dans un même plan, et soient a, a_1 deux rayons correspondants. Le faisceau T_1 forme par ses intersections avec la droite a une lignée dont les points sont aa_1, ab_1, ac_1, etc. De même le faisceau T détermine sur a_1 la lignée a_1a, a_1b,..... Or, deux biquotients analogues quelconques



de ces lignées ont la même valeur que les biquotients analogues des faisceaux et, par suite, sont égaux entre eux; donc les deux lignées en question sont projectives. De plus, deux éléments correspondants aa_1, a_1a coïncident; de là résulte que les deux lignées sont en perspective, et que les droites (ab_1, a_1b), (ac_1, a_1c)... menées par les points correspondants concourent en un même point S. Si l'on désigne par o le rayon TT_1 du faisceau T et par p_1 le rayon T_1T du du faisceau T_1, il faudra que la droite (a_1o, ao_1) passe également par S, donc T_1S est le rayon o_1. De même, TS est le rayon p. Donc S est l'intersection des deux rayons qui correspondent aux éléments superposés.

En outre, on voit que si l'on prend les lignées formées par les faisceaux sur deux autres rayons correspondants quelconques b, b_1, ces deux lignées seront encore en situation de perspective, et pour la même raison que ci-dessus, le centre de perspective devra se trouver à l'intersection des rayons o_1, p. Ce sera donc toujours le même point S. Ainsi

Lorsque deux faisceaux sont projectifs et situés dans un même plan, la droite qui joint les intersections ab_1, a_1b de deux rayons quelconques a, b d'un faisceau avec les rayons correspondants pris inversement, passe toujours par un point fixe S, que nous appelons le centre projectif des deux faisceaux. Ce point est l'intersection des deux rayons o_1, p qui correspondent aux éléments superposés.

Il en résulte que si l'on donne trois paires de rayons a, a_1, b, b_1, c, c_1 de deux faisceaux projectifs, on pourra facilement construire avec la règle seule le rayon x qui correspond à un rayon quelconque donné x_1. Deux des trois droites (ab_1, a_1b), (bc_1, b_1c), (ca_1, c_1a) déterminent par leur inter-

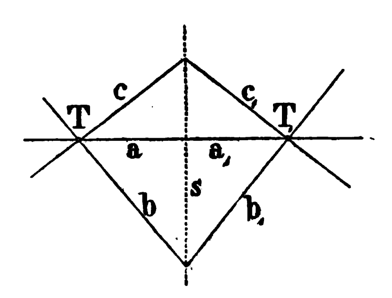
section le centre projectif S. Si maintenant on choisit deux rayons correspondants connus c, c_1, il faudra que la droite (cx_1, c_1x) passe par S; or, on connaît les points cx_1 et S; donc le troisième point c_1x se trouve à la fois sur la droite qui joint les deux points cx_1, S et sur c_1, donc à leur intersection. C'est par ce dernier point que doit passer le rayon cherché x.

Du théorème precédent se déduit le corollaire :

125. *Etant donnés dans un même plan deux faisceaux de trois rayons chacun,* a, b, c, a_1, b_1, c_1, *les droites* (ab_1, a_1b), (bc_1, b_1c), (ca_1, c_1a) *concourent en une même point S.*

Situation en perspective. — **126.** Deux faisceaux projectifs T, T_1 sont en situation de perspective, lorsque trois paires de rayons correspondants sont en perspective (se coupent sur une droite).

Lorsque les deux faisceaux se trouvent dans un même

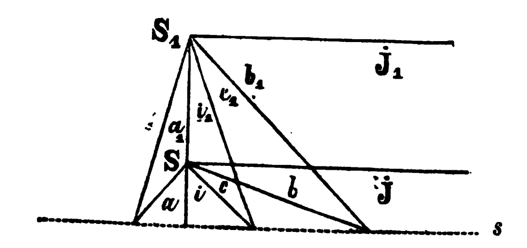


plan et que deux rayons correspondants a, a_1, coïncident, on peut dire qu'alors les trois paires a, a_1, b, b_1, c, c_1 sont en situation de perspective, donc les faisceaux sont également perspectifs.

Si les deux faisceaux sont perspectifs, les intersections des

rayons correspondants sont situées sur une droite s qui est l'axe de perspective des deux faisceaux; le centre de perspective peut être pris arbitrairement sur la droite TT_1. Les faisceaux restent évidemment en perspective, lorsqu'on tourne l'un ou l'autre autour de l'axe.

127. Supposons les deux faisceaux situés dans un même plan et en perspective, et soient par exemple i, i_1, les rayons



correspondants qui coïncident. Au rayon j qui est parallèle à l'axe s doit correspondre un rayon j_1 également parallèle à s, puisque, les deux faisceaux étant perspectifs, j_1 doit passer par le point d'intersection de j avec s. Ces deux rayons j, i_1 font donc avec les rayons coïcidents i, i_1 des angles égaux; du reste, il est clair qu'en général toute autre paire b, b_1 forme respectivement avec i, i_1 des angles inégaux entre eux. Donc, lorsqu'on transportera l'un des sommets S_1 en un autre point S_2, sans sortir du plan et en maintenant la coïncidence des deux rayons i, i_1, les rayons j, j_1 restent parallèles; mais comme les faisceaux sont perspectifs, le point d'intersection jj_1 doit se trouver sur le nouvel axe et, par conséquent. cet axe est encore parallèle à j. Ainsi

Lorsque deux faisceaux, situés dans un même plan, sont projectifs, et que deux rayons correspondants coïncident, les deux faisceaux sont en situation de perspective, et l'axe est parallèle aux deux rayons correspondants qui sont eux-mêmes parallèles ou qui forment des angles égaux avec les deux rayons superposés.

EQUATION ENTRE DEUX FAISCEAUX PROJECTIFS. — 128. Soient deux faisceaux T, T_1 déterminés par trois paires de rayons correspondants a, a_1, b, b_1, c, c_1, et soient deux origines k, l_1 choisies arbitrairement parmi les rayons de chacun des faisceaux. Si l'on représente par a, b, c, x les tangentes des angles (ka), (kb), (kc), (kx) et par a_1, b_1, c_1, x_1 celles des angles (l_1a_1), (l_1b_1), (l_1c_1), (l_1x_1), il sera posible d'exprimer la relation projective des deux faisceaux au moyen de l'équation (v. 87)

(25) $$mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

où $m = a(b_1-c_1) + b(c_1-a_1) + c(a_1-b_1)$

$n = -aa_1(b_1-c_1)-bb_1(c_1-a_1)-cc_1(a_1-b_1)$

$p = aa_1(b-c) + bb_1(c-a) + cc_1(a-b)$

$q = -aa_1(bc_1-b_1c)-bb_1(ca_1-c_1a)-cc_1(ab_1-a_1b)$

La proposition réciproque est également vraie (v. 89).

129. L'angle de deux rayons x, y du faisceau T satisfait toujours à l'équation suivante

$$(xy) = (xk) + (ky) = -(kx) + (ky)$$

d'où

$$\text{Tang}(xy) = \frac{-\text{Tang}(kx) + \text{Tang}(ky)}{1 + \text{Tang}(kx).\ \text{Tang}(ky)}$$

ou, en représentant par x, y les tangentes de (kx), (ky)

$$\text{Tang}(xy) = \frac{-x+y}{1+xy}$$

On aurait de même

$$\mathrm{Tang}(x_1y_1) = \frac{-x_1 + y_1}{1 + x_1y_1}$$

mais l'équation (25) donne

$$x_1 = -\frac{nx + q}{mx + p}$$

$$y_1 = -\frac{ny + q}{my + p}$$

Deux des quantités x, y, x_1, y_1, Tang(xy), Tang(x_1y_1) étant données, toutes les autres se déterminent au moyen des quatre dernières équations. En particulier, si les deux angles projectifs (xy), (x_1y_1) sont égaux, et si l désigne leur tangente, on a

$$(26)\ l = \frac{(m^2+n^2-mq+np)x^2+2(mp+nq)x+(p^2+q^2-mq+np)}{(mp+nq)x^2+(p^2+q^2-m^2-n^2)x+(mq-np-p^2-q^2)}$$

A chaque quantité mise à la place de x correspond généralement une seule valeur de l; en d'autres termes, chaque rayon x du faisceau T est l'un des côtés d'un angle (xy) qui est égal à sa projection (x_1y_1). Pour obtenir l'équation qui concerne les angles égaux mais négativement projectifs, il suffit de changer le signe de Tang(x_1y_1) ou ceux de n et q dans (26).

Les deux racines de l'équation

$$(mp+nq)x^2+(p^2+q^2-m^2-n^2)x+(mq-nq-p^2-q^2) = 0$$

substituées à la place de x dans (26), rendent l infini et déterminent, par conséquent, les deux côtés de l'angle qui est égal à sa projection et dont la tangente est infinie; ces deux côtés sont les rayons limites i, j.

Si dans (26) l'on fait x égal à l'une des deux racines de l'équation

$$(m^2+n^2-mq+np)x^2+2(mp+nq)x+(p^2+q^2-mq+np) = 0$$

la valeur de l est nulle ; les deux racines donnent ainsi les rayons *g*, *h*.

130. De même que pour les lignées, l'équation (25) peut être réduite à un plus petit nombre de termes. Si l'on prend deux rayons correspondants pour origines, elle est alors satisfaite pour $x = 0$, $x_1 = 0$, d'où l'on déduit que $q = 0$; dans ce cas, on a

$$mxx_1 + nx + px_1 = 0$$

Si l'on adopte comme origines deux rayons limites correspondants i, i_1 ou j, j_1, l'équation (25) sera satisfaite par $x = 0$, $x_1 = 0$, et par $x = \infty$, $x_1 = \infty$, d'où résulte que m et q sont nuls. On a donc

$$nx + px_1 = 0$$

Lorsque les origines sont deux rayons limites non correspondants i, j_1, ou j, i_1, l'équation (25) étant vérifiée par $x = 0$, $x_1 = \infty$ et par $x = \infty$, $x_1 = 0$, se réduit aux deux termes

$$mxx_1 + q = 0$$

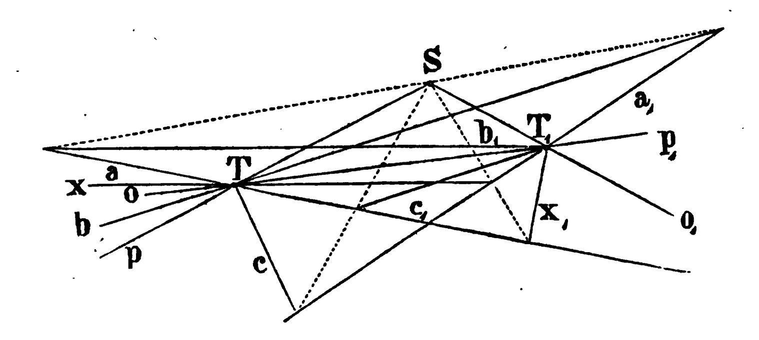
Les réciproques des propositions de cet article se démontrent sans aucune difficulté.

Deux feuillées projectives en général.

Analogie avec deux faisceaux projectifs. — 131. Supposons deux feuillées projectives t, t_1. Les deux faisceaux T, T_1, formés par les intersections de chaque feuillée avec un plan perpendiculaire à son arête, seront eux-mêmes projectifs, et, de plus, les angles compris entre deux rayons d'un faisceau nous donneront directement la grandeur de l'angle dièdre compris entre ceux des plans de la feuillée, qui passent par

ces rayons. Les éléments i, j, i, j_1, g, g_1, h, h_1, etc. des deux faisceau T, T_1 déterminent dans les feuillées des plans I, J, I_1, J_1, G, G_1, H, H_1, etc. qui jouissent des mêmes propriétés.

Axe projectif. — 132. Soient deux feuillées projectives t, t_1 dont tous les plans passent par un même point P. Si l'on coupe les deux feuillées par un plan qui ne contienne



pas le point P, on obtient deux faisceaux projectifs T, T_1. Les droites (ab_1, a_1b), ... menées par les intersections de deux rayons de T avec les rayons correspondants pris inversement, passent toutes par un point fixe S, situé à la rencontre des deux rayons o_1, p qui correspondent aux éléments superposés o, p_1 (v. 124). En projetant toute la figure plane depuis le point P, on a le théorème :

Lorsque deux feuillées sont projectives et ont un point commun, le plan mené par les intersections AB_1, A_1B de deux plans quelconques A, B, d'une feuillée avec les plans correspondants pris inversement, passe toujours par une droite fixe s, que nous appelons l'axe projectif des deux feuillées ; cette droite est l'intersection des deux plans qui correspondent aux plans superposés.

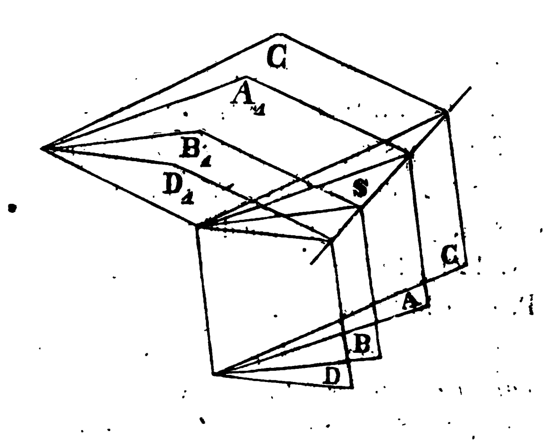
133. D'où le corollaire :

Etant données autour d'un point deux feuillées de trois plans chacune A, B, C, A_1, B_1, C_1, les plans (AB_1, A_1B), (BC_1, B_1C), (CA_1, A_1C) passent par une même droite s.

Situation en perspective. — 134. Deux feuillées projectives t, t_1 sont en situation de perspective, lorsque trois couples de plans correspondants sont perspectifs, ou ce qui est la même chose, lorsque les intersections de trois paires de plans correspondants sont situées dans un même plan.

Il y a spécialement situation de perspective, dès que les deux feuillées projectives ont un plan commun.

Le plan S qui contient les intersections des plans correspondants est ce que nous appelons la *face de perspective ;*



toutes les intersections passent par le point de rencontre des arêtes t, t_1 et forment un faisceau qui est perspectif avec les deux feuillées.

Deux lignées projectives sur une même droite.

Du sens. — 135. En admettant, comme nous l'avons fait, que dans une droite t les deux extrémités forment un point unique I, nous ne déterminons pas de sens sur cette droite avec deux seuls points A, B. En effet, le point mobile qui part de A peut arriver en B de deux manières, à savoir par

J_1

I D A B C I

les chemins AEB et ADIICB. Mais si trois points successifs A, B, C du parcours sont connus, le sens du mouvement sera déterminé. Quand la position intermédiaire B est hors du segment (AC), le point mobile doit passer l'infini.

Supposons deux lignées projectives t, t_1 situées sur une même droite. Tandis qu'un point mobile sur la première

C_1 B_1 A_1

A B C

lignée passe successivement par A, B, C, le point correspondant passera par A_1, B_1, C_1. Suivant que ces deux sens A, B, C et A_1, B_1, C_1 sont identiques ou non, les deux lignées sont dites *de même sens* ou de *sens contraires*.

Points doubles. — 136. Examinons si dans deux lignées projectives superposées, il peut arriver que deux points correspondants coïncident.

Cas où les deux lignées sont de sens contraires.

Quand un point mobile X parcourt la branche IAJ le point

J_1 E_1 A_1 I_1 F_1 J_1

I A E J F I

projectif X_1 décrit simultanément $I_1A_1J_1$; il y a donc rencontre hors de (JI_1) dans une position E, que nous appellerons *point double.* Ce dernier satisfait à la condition

$$(EJ)(E_1I_1) = (AJ)(A_1I_1)$$

puisque E représente deux éléments correspondants (v. 100). Le point F symétrique de E par rapport au milieu O de (JI) est un second point double, car on a

$$(FJ)(F_1I_1) = (AJ)(A_1I_1)$$

Les deux segments (EF), (E_1F_1), renfermant chacun un point limite, sont égaux et négativement projectifs.

Cas où les deux lignées sont de même sens. Les seules parties correspondantes superposées sont celles qui se trouvent entre les points limites J, I_1; mais, comme deux points

J_1 E_1 F_1 I_1 A_1 J_1

∞ ———————————————— ∞

I A H J E G F I

mobiles projectifs suivent le même sens en décrivant les deux lignées, il peut se faire qu'il n'y ait pas de rencontre. S'il y a un point double E, il faut que

$$(EJ)(EI_1) = (AJ)(A_1I_1) = (GI)^2$$

En d'autres termes, le point E doit partager le segment (JI_1) en deux parties dont le rectangle soit égal au carré de (GI). Réciproquement, tout point E qui satisfait à cette condition, est un point double (v. 101). Or, quand (JI_1) n'est pas plus petit en valeur absolue que 2(GJ) ou que (GH), il existe un tel point E; son symétrique F par rapport au milieu O de (JI_1) jouit de la même propriété. Les segments (EF), (E_1F_1) sont égaux et projectifs.

137. Cas particuliers. Quand les deux lignées sont semblables, les points infinis se correspondent et sont superposés; ils forment ainsi l'un des points doubles. Les segments projectifs étant proportionnels, on a

$$(AX) : (A_1X_1) = (AB) : (A_1B_1)$$

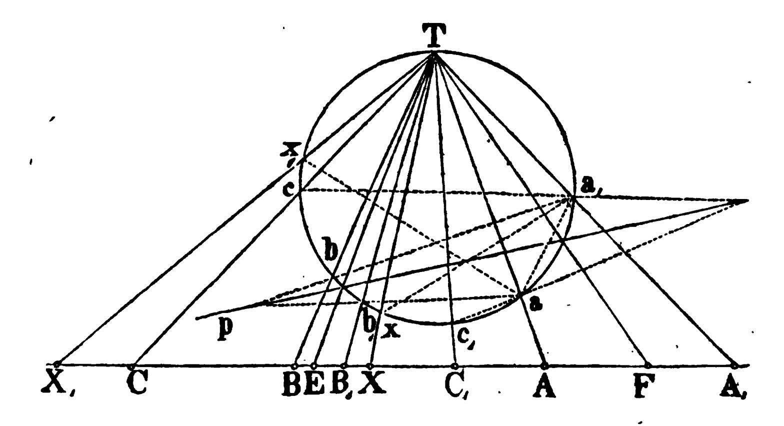
et réciproquement deux points X, X_1 qui satisfont à cette relation se correspondent l'un à l'autre. Donc le point F qui partage le segment (AA_1) dans le rapport $(AB) : (B_1A_1)$ est le second point double, puisqu'on a la proportion

$$(AF) : (A_1F) = (AB) : (A_1B_1)$$

Enfin, quand trois points coïncident avec leurs correspondants, il doit en être de même pour les autres paires. Tous les éléments sont des points doubles et les deux lignées sont identiques.

Construction des points doubles. — 138. D'un point T pris sur la circonférence d'un cercle projetez sur celle-ci les lignées A, B, C,.... A_1, B_1, C_1,.... respectivement en a, b, c,..., a_1, b_1, c_1,... Soit p la droite menée par les intersections (ab_1, a_1b), (ac_1, a_1c), (bc_1, b_1c),... (v. 110).

Pour obtenir le point X_1 qui correspond à un point donné X,

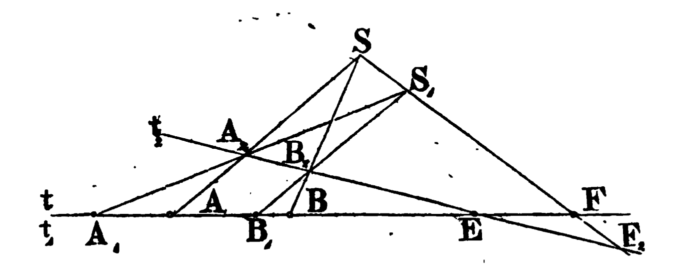


il suffit de mener une droite a_1x par les projections du point X et d'un point A_1 de la seconde lignée, puis une autre droite par le point homologue a et l'intersection de a_1x avec p. La dernière ligne menée rencontre la circonférence en x_1; la droite Tx_1 détermine le point cherché X_1. En particulier, les points E, F dont les projections e, f se trouvent à la fois sur p et sur la circonférence, sont les points doubles des deux lignées; car si l'on cherche leurs correspondants, on obtient les mêmes points. De ce qui précède résulte la construction suivante :

On projette depuis un point T *de la circonférence d'un cercle sur cette circonférence trois paires de points* A, A_1, B, B_1, C, C_1 *respectivement en* a, a_1, b, b_1, c, c_1; *puis on mène la droite* p *par deux des trois intersections* (ab_1, a_1b), (ac_1, a_1c), (bc_1, b_1c). *Les rayons menés du point* T *aux intersections de* p *avec le cercle passent par les points doubles* E, F.

139. *Etant donnés deux paires de points* A, A_1 B, B_1, *et un point double* E, *construire le second* F.

Projetez d'un point quelconque S les deux points A, B sur une droite t_2 menée par E. La droite qui joint le point S avec



l'intersection S_1 de A_1A_2, B_1B_2 passera par F. En effet, les deux lignées A, B, E, F et A_1, B_1, E, F étant perspectives,

chacune avec A_2, B_2, E, F_2 sont projectives entre elles et par conséquent F est un point double.

Si les deux lignées superposées sont semblables, le point E se trouve alors à l'infini (v. 137), et la droite t_2 devient parallèle à AB.

Si les deux lignées sont semblables et si de plus les segments (AB), (A_1B_1) sont égaux et de même signe, le point E sera encore à l'infini, et t_2 restera parallèle à AB, comme dans le cas précédent. Le centre S étant pris à l'infini, il faudra que la droite SS_1 et par suite l'intersection F de SS_1 avec AB soient situées également à l'infini.

PROPRIÉTÉS DES POINTS DOUBLES. — 140. *Le quotient* $\frac{EX}{XF} : \frac{EX_1}{X_1F}$ *des rapports de simple section des points doubles* E, F *par deux points correspondants variables* X, X_1 *a une valeur constante égale à* $-\frac{(EJ)}{(JF)}$ (v. 98).

141. *Deux lignées projectives superposées sont semblables, quand elles ont un point double à l'infini; elles sont, en outre, égales et de même sens, quand elles ont deux points doubles à l'infini.*

Ce théorème se démontre aisément par l'impossible.

142. Entre les segments (KX) ou x et (L_1X_1) ou x_1, il existe (v. 87) une équation de la forme

(27) $$mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

Lorsque l'origine L_1 coïncide avec K, et que $x = x_1$, les

K L_1 E O_1 O F J

points correspondants sont des points doubles. Ceux-ci sont alors donnés par les racines de l'équation

$$(28)\qquad x^2 + \frac{n+p}{m}x + \frac{q}{m} = 0$$

Le coefficient du second terme, pris négativement, représente la somme des racines, c'est-à-dire la double distance de l'origine K au milieu O du segment des points doubles; le troisième terme est le produit des racines ou des distances des points doubles à l'origine K.

Le point O est aussi le milieu du segment (JI_1) des points limites. En effet, la distance KO ayant pour valeur

$$-\frac{n+p}{2m} \text{ est égale à } \frac{1}{2}\left(-\frac{p}{m}-\frac{n}{m}\right)$$

c'est-à-dire à la demi-somme des longueurs KJ, L_1I_1 (v. 113).

L'équation (27), rapportée au point O comme origine, doit être satisfaite par les trois couples de valeurs

$$x = (OI) = \infty, \qquad x_1 = (OI_1).$$
$$x = (OJ) = -(OI_1), \qquad x_1 = (OJ_1) = \infty$$
$$x = (OO) = 0, \qquad x_1 = (OO_1)$$

On en déduit que

$$n = -m(OI_1)$$
$$p = m(OI_1)$$
$$q = -m(OI_1)(OO_1)$$

L'équation (28) des points doubles devient, grâce à ces substitutions,

$$x^2 = -\frac{q}{m} = (OI_1)(OO_1)$$

donc

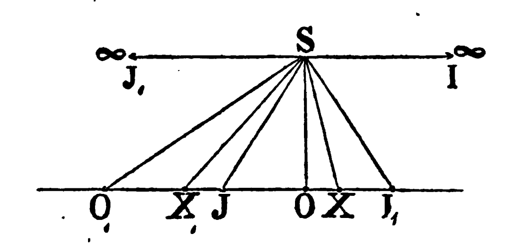
$$(OE) \text{ ou } (OF) = \pm\sqrt{(OI_1)(OO_1)}$$

Pour que le second membre soit une quantité réelle, il est nécessaire et il suffit que les deux segments (OI_1), (OO_1) soient de même signe; ainsi

Les points doubles de deux lignées projectives superposées sont réels, lorsque le point O_1 correspondant au point milieu O du segment (JI_1) des points limites est situé du même côté que son point limite I_1 par rapport au point milieu. Si tel n'est pas le cas, le produit $(OI_1)(OO_1)$ est négatif, et les points doubles sont imaginaires; néanmoins leur milieu O et le produit de leurs distances à un point quelconque des lignées sont encore deux quantités réelles, qui les déterminent par l'équation (28).

143. *Quand deux lignées projectives situées sur une même droite n'ont pas de points doubles réels, il existe de part et d'autre de cette droite un point d'où l'on voit sous des angles égaux et formés dans un même sens de rotation tous les segments compris entre deux points correspondants.*

Soit O le point milieu de (JI_1). Son correspondant O_1 ne doit pas être situé du même côté que I_1 par rapport à O,



puisque les points doubles sont imaginaires. Prenez sur la perpendiculaire en O une longueur (OS) moyenne proportionnelle entre (OO_1) et (OI_1). Je dis que l'angle XSX_1 sous

lequel on voit du point S deux points correspondants quelconques X, X_1 a une grandeur constante.

En effet, l'angle $ISI_1 = JSJ_1$; de plus, comme

$$(OJ) : (OS) = (OS) : (OO_1),$$

les deux triangles rectangles SOJ, SOO_1 sont semblables et par suite l'angle $OSO_1 = OJS = JSJ_1$. En outre, vu la position du point O_1, l'angle OSO_1 a le même signe que JSJ_1. Si l'on tourne le faisceau SI, SO, SJ, SX d'un angle égal à ISI_1, les trois premiers rayons coïncideront avec leurs correspondants, et puisque les deux faisceaux sont projectifs, les quatrièmes rayons SX, SX_1 devront aussi coïncider. Donc l'angle XSX_1 est constant.

144. La réciproque du dernier théorème se démontre facilement. Or, les points doubles, tout en étant imaginaires, sont néanmoins déterminés par leur milieu O et par le produit $(OI_1)(OO_1)$ ou $(OS)^2$; ils ne dépendent donc en aucune sorte de la grandeur de l'angle XSX_1. Par conséquent

Si autour d'un point S *on fait tourner dans un même plan un angle* XSX_1 *de grandeur constante, ses côtés détermineront sur une droite fixe deux lignées projectives,* X, X_1 *qui auront toujours les mêmes points doubles (imaginaires), quelle que soit la grandeur de l'angle* XSX_1.

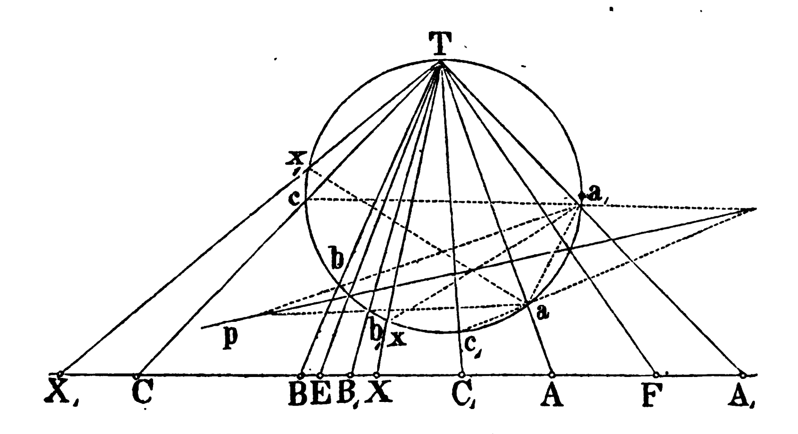
145. Supposons qu'autour du point S on fasse tourner un angle de grandeur constante, les côtés détermineront deux lignées projectives sur la droite infinie du plan. Si l'on mène autour d'un même point T des rayons parallèles aux côtés de l'angle mobile, les intersecttons avec la droite infinie seront les mêmes. En vertu du théorème précédent, les points doubles ne dépendent pas de la grandeur de l'angle. Donc

Tout angle qui tourne autour de son sommet, forme par les

intersections de ses côtés avec la droite infinie du plan deux lignées projectives, qui ont les mêmes points doubles imaginaires, quelles que soient la grandeur de l'angle et la position du sommet.

Deux faisceaux projectifs autour d'un point et dans un plan.

146. Lorsqu'une droite coupe deux faisceaux projectifs TA, TB,.. TA_1, TB_1,.. ayant un même sommet T et situés dans un même plan, elle forme par ses intersections A, B, C,... A_1, B_1, C_1,... deux lignées projectives. Si X et X_1 représentent deux points correspondants de ces lignées, les rayons TX, TX_1 seront aussi correspondants, et par suite les droites TE, TF menées par les points doubles E, F seront elles-mêmes des rayons doubles. Pour obtenir ces derniers, il suffira donc de rechercher les points doubles E, F d'après le procédé indiqué plus haut (v. 138). Quand le point T d'où l'on projette la lignée sur la circonférence d'un cercle, coïncide



avec le sommet T des deux faisceaux, la construction a lieu comme suit :

Pour construire les rayons doubles e, f de deux faisceaux projectifs ayant un même sommet T *et situés dans un même plan, on fait passer par le sommet* T *une circonférence de cercle; on détermine ensuite la droite p où se coupent toutes les paires de droites* ab_1, a_1b *menées par les intersections* a, b *de deux rayons d'un faisceau avec la circonférence et les intersections correspondantes* a_1, b_1, *prises inversement. Les deux rayons qui aboutissent aux extrémités de la corde p sont les rayons doubles cherchés.*

Quand les faisceaux ont des sens contraires, il en est de même pour les lignées A, B, C,.. A_1, B_1, C_1 ; les points E, F et, par conséquent, les rayons doubles sont alors toujours réels. Quand les lignées sont de même sens, les points doubles sont tantôt réels, tantôt imaginaires : les rayons doubles, qui aboutissent à ces points, seront donc réels dans certains cas; dans les autres, ils seront dits *imaginaires.*

Propriétés des rayons doubles. — 147. *Le quotient* $\frac{\text{Sin}(ex)}{\text{Sin}(xf)} : \frac{\text{Sin}(ex_1)}{\text{Sin}(x_1f)}$ *des rapports de simple section des rayons doubles e, f par deux rayons correspondants variables* x, x_1 *a une valeur constante.* (v. 118).

148. Si, dans les deux faisceaux, on prend pour origine une même droite k, les tangentes x, x_1 des angles compris entre deux rayons correspondants x, x_1 et l'origine k seront liées entre elles par une équation de la forme

$$\mathrm{mxx_1 + nx + px_1 + q = 0}$$

Si de plus on fait $\mathrm{x = x_1}$, cette relation devient

$$\mathrm{x^2 + \frac{n+p}{m}\,x + \frac{q}{m} = 0}$$

Les deux racines représenteront les tangentes des angles

(ke), (kf) formés par les rayons doubles avec l'origine. Le produit des racines est toujours égal au terme connu $\frac{q}{m}$; et leur somme au coefficient $\frac{n+p}{m}$ pris avec le signe moins.

Soit o la bissectrice des rayons e, f, en d'autres termes, soit

$$2(ko) = (ke) + (kf)$$

d'où

$$\text{Tang}\, 2(ko) = \frac{\text{Tang}(ke) + \text{Tang}(kf)}{1 - \text{Tang}(ke).\, \text{Tang}(kf)} = \frac{n+p}{q-m}$$

La bissectrice o est donc toujours réelle. Or, comme les deux rayons e, f doivent satisfaire aux conditions

$$\text{Tang}(ei).\, \text{Tang}(ej_1) = \text{Tang}(ai).\, \text{Tang}(a_1 j_1)$$

$$\text{Tang}(fi).\, \text{Tang}(fj_1) = \text{Tang}(ai).\, \text{Tang}(a_1 j_1)$$

il en résulte qu'ils sont situés symétriquement par rapport à la bissectrice de l'angle (ij_1); les rayons doubles et les rayons limites i, j_1 ont ainsi une même bissectrice. Donc

Quelle que soit la nature des rayons doubles e, f, le produit des tangentes des angles (ke), (kf) formés par un rayon quelconque k avec les éléments doubles e, f a toujours une valeur réelle. De même, l'angle compris entre les rayons doubles possède dans tous les cas une bissectrice réelle, qui est également celle de l'angle (ij_1) formé par deux rayons limites non correspondants.

149. Soient autour d'un point deux faisceaux superposés, dont les angles correspondants sont égaux chacun à chacun et dirigés dans le même sens. Ces deux faisceaux, qu'on peut former par la rotation d'un angle de grandeur constante, sont coupés par la droite infinie du plan en deux lignées projec-

tives, dont les points doubles sont imaginaires et indépendants soit de la grandeur de l'angle générateur, soit de la position du sommet (v. 144). Donc

Les rayons doubles imaginaires de deux faisceaux superposés dont les angles correspondants sont égaux et formés dans un même sens, ont dans chaque plan des directions constantes.

Deux feuillées projectives autour d'une même droite.

150. Etant données autour d'une même droite t deux feuillées projectives, si l'on mène un plan perpendiculaire a l'arête commune, les intersections formeront deux faisceaux projectifs. Les plans qui passent par t et par les rayons doubles e, f, ou par les rayons limites i, j, i_1, j_1 seront respectivement les plans doubles ou les plans limites des deux feuillées et jouiront de propriétés analogues à celles que nous avons démontrées pour les faisceaux.

Lignées projectives en involution.

Définition. — 151. Deux lignées projectives t, t_1 situées sur une même droite sont, comme nous l'avons vu, complètement déterminées par trois couples de points A, A_1, B, B_1, C, C_1, qui sont arbitraires. Or, il peut arriver que le point A

A_1 X_1 I_1 C_1 Z_1 B_1

C Z B J A X

coïncide avec C_1 et que A_1 coïncide pareillement avec C. En d'autres termes, les deux lignées t, t_1 peuvent être superpo-

sées de telle manière que les extrémités non correspondantes de deux segments projectifs égaux (AC), (A_1C_1) se recouvrent. Dans cette situation particulière, les lignées constituent ce qu'on appelle une *involution de points.*

En général, des lignées projectives sont involutoires ou, ce qui est la même chose, elles forment une involution de points, lorsqu'un des points, considéré successivement comme appartenant à l'une puis à l'autre des deux lignées, a, dans chacun des deux cas, le même point pour correspondant.

POINTS CONJUGUÉS. — 152. Soient deux lignées projectives t, t_1 superposées, et supposons que les points A, C de l'une coïncident respectivement avec les points C_1, A_1 de l'autre. Tout point X de t peut être envisagé comme représentant un point Z_1 de t_1. Puisque les deux lignées sont projectives, le biquotient (ACXZ) doit être égal à ($A_1C_1X_1Z_1$) ou, par suite de l'hypothèse, à (CAX_1X) ou bien encore, vu les permutations possibles, à ($ACXX_1$); donc le point X_1 doit coïncider avec Z.

De là résulte qu'il est permis d'envisager un point quelconque comme appartenant à l'une ou à l'autre des lignées, sans que sa projection change; c'est ce qu'on exprime en disant qu'on peut dans une involution permuter deux lettres correspondantes X, X_1. Les deux points d'une même paire sont appelés pour cette raison *points conjugués.*

Lorsque deux lignées sont en involution, tout point considéré comme appartenant à l'une puis à l'autre des deux lignées doit avoir dans chacun des deux cas le même point pour correspondant. Quatre points quelconques sont toujours projectifs avec leurs conjugués.

153. Une involution se trouve surabondamment détermi-

née par deux paires de points conjugués A, A_1 B, B_1, car chaque paire A, A_1 en représente deux A, A_1, C, C_1, et trois paires suffisent pour déterminer deux lignées projectives.

Point central. — 154. Comme le point infini des deux lignées est à la fois I et J_1, il faudra, s'il y a involution, que les points I_1 et J coïncident. Donc

Dans deux lignées involutoires, les points limites I_1 *et* J *se trouvent réunis en un point* J *que nous appellerons le point central de l'involution.*

La propriété réciproque est une conséquence de la définition; donc

Deux lignées projectives superposées de telle manière que les points limites J, I_1 *coïncident, sont en involution.*

Points doubles. — 155. Si dans une involution les deux branches qui coïncident, sont correspondantes, les deux lignées auront des sens contraires et, par conséquent, des points

B_1 F B J A E A_1

doubles réels (v. 136). En passant au besoin par l'infini, on peut aller de A vers A_1 sans rencontrer ni B ni B_1 et vice-versâ. On dit alors que *les paires ne se séparent pas.* Dans ce cas, les segments projectifs égaux (AA_1), qui sont superposés, ne comprennent pas les points limites J, I_1.

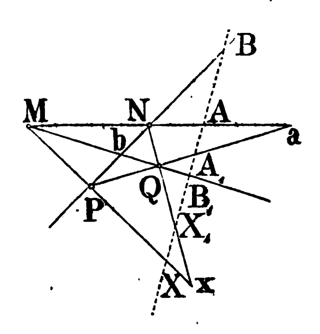
Si, au contraire, les deux branches qui coïncident ne sont point correspondantes, les deux lignées auront un même sens, et comme le segment (JI_1) est toujours moindre que

A_1 B J A B_1

(GH), il en résulte que les points doubles seront toujours imaginaires (v. 136). Les points correspondants sont situés de part et d'autre du point central. Ce sont alors des segments négativement projectifs qui sont superposés. On remarquera qu'il n'est pas possible d'aller d'un point A à son conjugé A_1, sans passer par l'un des points B, B_1; en d'autres termes, *les paires se séparent.* Donc

Dans toute involution les points doubles sont réels, quand les paires ne se séparent pas; ils sont, en revanche, imaginaires quand les paires se séparent.

INVOLUTION DANS LE POLYGONE COMPLET DE QUATRE SOMMETS. — 156. Soient quatre points M, N, P, Q situés dans un même plan. Si nous menons toutes les droites possibles



par deux quelconques de ces quatre points, nous obtenons les trois paires suivantes :

1° MN, PQ, qui se coupent en un point a,

2° MQ, NP, qui se coupent en un point b,

3° MP, NQ, qui se coupent en un point x.

Chaque paire est ainsi représentée par les quatre lettres M, N, P, Q. L'ensemble de ces droites constitue ce que nous

appellerons un *polygone complet de quatre sommets.* Menons une transversale quelconque et soient A, A_1 ses intersections avec la première paire, B, B_1 celles avec la seconde et X, X_1 celles avec la troisième. Les quatre points M, N, A, a de l'une des droites MN sont projetés sur la transversale depuis les deux autres sommets P, Q d'abord en X, B, A, A_1 puis en B_1, X_1, A, A_1 ; donc

$$(XBAA_1) = (B_1X_1AA_1)$$

d'où (v. 53)

$$(XBAA_1) = (X_1B_1A_1A)$$

Nous avons, par conséquent, sur une droite deux lignées projectives telles que le point A, considéré successivement comme appartenant à la première lignée et à la seconde, a, dans les deux cas, le même point A_1 pour correspondant. De là, le théorème :

Tout polygone complet de quatre sommets est coupé par une transversale quelconque en trois paires de points qui forment une involution.

CONSTRUCTIONS D'UN POINT CONJUGUÉ. — 157. *Etant données deux lignées en involution par deux paires de points* A, A_1, B, B_1, *construire le point* X *qui correspond à un point donné* X_1.

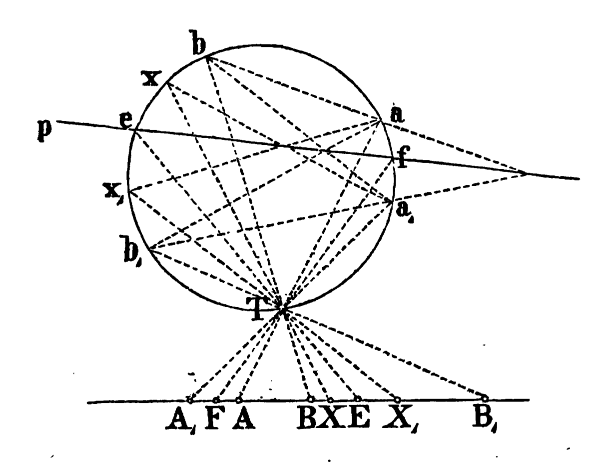
Premier procédé. La lignée A, A_1, B, X devant être projective avec A_1, A, B_1, X_1 à cause de l'involution, la construction du point X pourra s'effectuer comme pour les lignées superposées (v. 78, second cas).

Deuxième procédé. L'involution formée sur la transversale au polygone complet de quatre sommets nous donne également un moyen très-simple de construire avec la règle le point cherché X.

Prenez deux points N, Q en ligne droite avec X_1 (v. la figure

précédente); joignez par des droites NA, NB, QA_1, QB_1, l'un de ces points N avec un point de chacune des deux paires données, et l'autre Q avec les points conjugués A_1, B_1. La droite MP qui joint les intersections (NA, QB_1), (NB, QA_1) des lignes ne contenant pas de points conjugués, passe par X.

Projection sur le cercle. — 158. D'un point T de la circonférence d'un cercle projetons sur cette dernière deux lignées en involution A, A_1, B, B_1, X, X_1... Les droites a_1b, ab_1

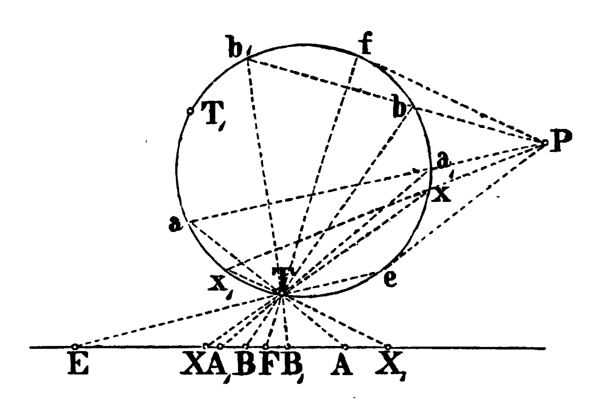


qui joignent deux projections a, b à leurs correspondantes a_1, b_1 prises inversement se coupent sur une droite p (v. 110). De même les droites ab, a_1b_1 qui joignent deux paires de points conjugués se rencontrent sur p. En effet, vu l'involution, il est permis de regarder le point B comme appartenant à la lignée t_1 et B_1 comme son homologue dans t; en d'autres termes, on peut désigner b par d_1 et b_1 par d; or, l'intersection de a_1d, ad_1, c'est-à-dire celle de ab, a_1b_1 est sur p. Donc

Si d'un point T *de la circonférence d'un cercle on projette*

sur cette dernière en a, a_1 b, b_1,... *deux lignées involutoires* A, A_1, B, B_1,... *les intersections de deux droites dont l'une est menée par deux projections quelconques* a, b *et l'autre par les points correspondants* a_1, b_1 *se trouveront toutes sur une droite fixe p.*

159. En revanche, les droites aa_1, bb_1 menées par les projections correspondantes concourent en un point fixe P. En effet, soit T_1 un second point pris sur la circonférence du



cercle. Puisqu'il y a involution, la lignée A, A_1, B, B_1... est projective avec la lignée A_1, A, B_1, B,...; donc le faisceau TA, TA_1, TB, TB_1,... est projectif avec le faisceau TA_1, TA, TB_1, TB,... et par suite avec T_1a_1, T_1a, T_1b_1, T_1b,... Donc, toute droite aa_1, qui joint les intersections (TA, T_1a), (TA_1, T_1a_1) de deux rayons TA, TA_1 du premier faisceau avec les rayons correspondants T_1a_1, T_1a pris inversement passe par le centre projectif P. De là, le théorème.

Si d'un point T *de la circonférence d'un cercle on projette sur cette dernière en* a, a_1, b, b_1,.. *deux lignées involutoires* A,

A_1, B, B_1,... *les droites* aa_1, bb_1, *menées par les projections correspondantes se couperont toutes en un point fixe* P.

Construction des points doubles. — 160. Les deux propriétés précédentes nous permettent de construire le point X conjugué à un point donné X_1, ainsi que les points doubles E, F, lorsque l'involution est déterminée par deux paires A, A_1, B, B_1.

Premier procédé. D'un point T d'une circonférence de cercle (v. la figure du § 158) projetez sur cette dernière les points A, A_1, B, B_1, X_1 en a, a_1, b, b_1, x_1 et menez la droite p par les intersections (ab_1, a_1b), (ab, a_1b_1). Les deux lignes ax_1, a_1x devant se couper sur p, le point x sera, par conséquent, sur la droite $a_1(ax_1, p)$ et le rayon Tx déterminera le point demandé X.

Si l'on cherche comme ci-dessus le point correspondant au point E dont la projection e est située à la fois sur la circonférence et sur la droite p, on trouvera le point E lui-même; donc les rayons Te, Tf menés du sommet T aux intersections de la droite p avec la circonférence, passent par les points doubles de l'involution.

Second procédé. D'un point T d'une circonférence de cercle (v. la figure du § 159) projetez sur cette dernière en a, a_1,... les points donnés A, A_1,... de l'involution. La droite xx_1 devant passer par le point fixe (aa_1, bb_1) ou P,, il suffira de mener la droite Px_1, qui rencontrera la circonférence en un second point x; le rayon Tx contient le point cherché X.

Ainsi toute droite menée par P rencontre la circonférence en deux points, qui peuvent être considérés comme les projections x, x_1 de deux points conjugués. Si la droite menée

par P est tangente au cercle en un point e, la droite Te passera par un point double E.

Quand les paires A, A_1, B, B_1, ne se séparent point, il en est de même des projections a, a_1, b, b_1 sur la circonférence. Le point P se trouvera conséquemment hors du cercle, et l'on pourra mener, en général, deux tangentes. Dans ce cas, les points doubles sont réels et distincts.

Si les deux paires de l'involution se séparent, le point P devra se trouver à l'intérieur du cercle et les points doubles seront imaginaires.

Propriétés métriques. — 161. Dans deux lignées projectives on a en général la relation (v. 100)

$$(XJ)(X_1I_1) = (EJ)(E_1I_1)$$

Si les lignées sont involutoires et si le point E est l'un des

X_1 F X J A E A_1

éléments doubles, les points limites J, I_1 coïncideront ainsi que E, E_1. L'égalité ci-dessus devient alors

$$(XJ)(X_1J) = (EJ)^2$$

donc

Le produit des distances de deux points conjugués X, X_1 *au point central* J *est égal au carré de la distance d'un point double au point central.*

162. Réciproquement, *deux lignées superposées dont les points se correspondent un à un seront en involution, si le produit des distances de deux points correspondants* X, X_1 *à un point fixe* J *est constant.*

Car soient A, A_1 deux points correspondants; on aura

$$(XJ)(X_1J) = (AJ)(A_1J)$$

donc les deux lignées sont projectives (v. 101); en outre, les points X, X_1 peuvent être permutés; donc il y a involution.

163. *Lorsque trois paires de points* A, A_1, B, B_1, C, C_1 *sont en involution, quatre quelconques de ces points sont projectifs avec leurs conjugués et, par conséquent, tout biquotient de quatre paints quelconques est égal au biquotient analogue des points conjugués.*

En effet, les points A, A_1, B, C_1, par exemple, sont pro-

A_1 C B J A C_1 B_1

jectifs avec A_1, A, B_1, C, puisque les biquotients (AA_1BC_1), (A_1AB_1C) sont égaux (v. 110).

164. Réciproquement, *trois paires de points correspondants* A, A_1 B, B_1, C, C_1, *situés sur une même droite, sont en involution, lorsqu'un biquotient d'un point de chaque paire et d'un autre de ces points est égal au biquotient analogue des points correspondants.*

Car si l'on suppose qu'on ait $(AB_1CA_1) = (A_1BC_1A)$, la lignée A, B_1, C, A_1 sera projective avec la lignée A_1, B, C_1, A et, de plus, à un point A de la première et de la seconde lignée correspond le même point A_1; donc il y a involution (v. 151).

Si un point représente deux éléments correspondants E, E_1 on aura une involution, dont E sera l'un des points doubles.

165. *Lorsque trois paires de points correspondants* A, A_1, B, B_1, C, C_1 *situés sur une droite sont en involution, il existe entre ces points les égalités suivantes*

$$\frac{(AB)(AB_1)}{(AC)(AC_1)} = \frac{(A_1B)(A_1B_1)}{(A_1C)(A_1C_1)}$$

$$\frac{(BC)(BC_1)}{(BA)(BA_1)} = \frac{(B_1C)(B_1C_1)}{(B_1A)(B_1A_1)}$$

$$\frac{(CA)(CA_1)}{(CB)(CB_1)} = \frac{(C_1A)(C_1A_1)}{(C_1B)(C_1B_1)}$$

$$(AB_1)(BC_1)(CA_1) = -(A_1B)(B_1C)(C_1A)$$

$$(AB_1)(BC)(C_1A_1) = -(A_1B)(B_1C_1)(CA)$$

$$(AB)(B_1C_1)(CA_1) = -(A_1B_1)(BC)(C_1A)$$

$$(AB)(B_1C)(C_1A_1) = -(A_1B_1)(BC_1)(CA)$$

et réciproquement l'une quelconque de ces égalités exprime l'involution des six points.

En effet, chacune de ces expressions se ramène à une égalité entre deux biquotients formés d'une manière analogue avec les éléments correspondants. Ainsi la première est équivalente à

$$(ABCA_1) = (A_1B_1C_1A)$$

et la quatrième à

$$(AA_1B_1C) = (A_1ABC_1).$$

Or ces égalités sont une conséquence de l'involution et vice-versâ : ce qu'il fallait démontrer.

166. Quand deux lignées sont en involution, le rapport de double section (EXX_1F) du segment des points doubles

E X F X_1

par deux points correspondants quelconques X, X_1 est toujours égal à -1 ; car le rapport $\frac{(EX)}{(XF)} : \frac{(EX_1)}{(X_1F)}$ est,

comme nous l'avons vu (v. 98), toujours égal à $\frac{(EJ)}{(JF)}$ et, par conséquent, à —1, puisque le point J est au milieu de (EF).

Lorsque le biquotient (EXX_1F) de quatre points E, X, X_1, F est égal à —1, on dit que ces points forment une *division harmonique* ou bien que les deux points X, X_1 partagent *harmoniquement* le segment (EF) des deux autres.

De ce qui précède résulte le théorème suivant :

Dans deux lignées involutoires, le segment des points doubles est divisé harmoniquement par deux points correspondants quelconques X, X_1.

167. Réciproquement, *deux lignées superposées dont les points se correspondent un à un, seront en involution, lorsqu'un segment* (EF) *est divisé harmoniquement par toutes les paires de points correspondants* X, X_1.

En effet de l'égalité

$$\frac{(EX)}{(XF)} : \frac{(EX_1)}{(X_1F)} = -1$$

on déduit que

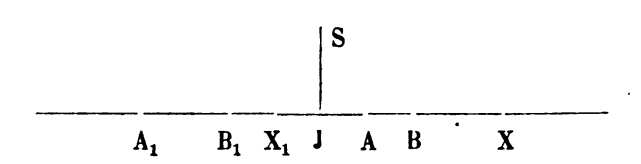
$$\frac{(EX_1)}{(X_1F)} : \frac{(EX)}{(XF)} = -1$$

d'où $$(EXX_1F) = (EX_1XF)$$

donc il y a involution (v. 164), et les points E, F en sont les éléments doubles.

Propriétés des lignées involutoires a points doubles imaginaires. — 168. *Lorsque les points doubles de deux lignées involutoires sont imaginaires, il existe deux points d'où l'on voit sous des angles droits formés dans un même sens les segments* (XX_1) *compris entre les points conjugués.*

Sur une perpendiculaire élevée au point central J prenez une longueur (JS) dont le carré soit égal au rectangle



$(AJ)(A_1J)$. Le rectangle $(XJ)(X_1J)$ étant constant et par suite égal à $(AJ)(A_1J)$ ou à $(JS)^2$, l'angle XSX_1 sera toujours droit et formé dans un même sens (v. 143).

169. Réciproquement, *lorsqu'un angle droit* XSX_1 *tourne dans un plan autour de son sommet, les deux côtés déterminent sur une droite fixe deux lignées involutoires* X, X_1 *dont les points doubles sont imaginaires.*

En effet, soit J le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la droite des lignées. On aura

$$(XJ)(X_1J) = (SJ)^2 = (AJ)(A_1J)$$

donc les deux lignées sont involutoires et, de plus, les points doubles seront imaginaires, puisque les paires A; A_1, X, X_1 se séparent.

Equation de l'involution sur une droite. — 170. Nous avons vu qu'entre les segments (KX) ou x et (KX_1) ou x_1 de deux lignées projectives superposées, il existe une relation de la forme

$$mxx_1 + nx + px_1 + q = 0$$

S'il y a involution, il faut qu'un point considéré successivement comme appartenant aux deux lignées ait chaque fois le même point correspondant ; en d'autres termes, il faut que les valeurs de x et de x_1, déduites de l'équation précédente,

soient égales, quand on remplace dans les deux cas la variable indépendante par une même quantité. On en conclut que les coefficients n et p doivent être égaux. Donc

Lorsque deux lignées sont en involution, il existe entre les segments x, x_1 *formés par chacun des points correspondants* X, X_1 *avec un point fixe de la même droite une relation symétrique par rapport aux deux variables et qui est de la forme*

$$mxx_1 + n(x + x_1) + q = 0$$

La proposition réciproque se démontre facilement.

171. Si nous prenons pour origine des segments le point central, où se trouvent réunis les points limites J, I_1, l'équation ci-dessus doit être satisfaite par les valeurs suivantes

$$x = 0, \qquad x_1 = \infty$$
$$x = \infty, \qquad x_1 = 0$$

On en conclut que, dans ce cas, la relation entre les deux lignées involutoires est exprimée par une équation de la forme

$$mxx_1 + q = 0$$

Division harmonique sur une droite. — 172. Quatre points E, F, X, X_1 situés sur une droite *t* forment une *division harmonique,* lorsque le rapport de double section du

E X F X_1

segment (EF) par les points X, X_1 est égal à —1, c'est-à-dire, lorsque

$$(29) \qquad \frac{(EX)}{(XF)} : \frac{(EX_1)}{(X_1F)} = -1$$

Cette égalité est équivalente avec les sept suivantes :

(30) $$\frac{(XE)}{(EX_1)} : \frac{(XF)}{(FX_1)} = -1$$

(31) $$\frac{(EX_1)}{(X_1F)} : \frac{(EX)}{(XF)} = -1$$

(32) $$\frac{(EX)}{(XF)} = -\frac{(EX_1)}{(X_1F)}$$

(33) $$\frac{-(KE)+(KX)}{-(KX)+(KF)} : \frac{-(KE)+(KX_1)}{-(KX_1)+(KF)} = -1$$

X_1 F X J K E

où K est un point quelconque de *t* (v. 86),

(34)* $$(XJ)(X_1J) = (EJ)^2$$

où J est le milieu du segment (EF),

(35)* $$\frac{1}{(EX)} + \frac{1}{(EX_1)} = \frac{2}{(EF)}$$

(36)* $$\frac{(EX)}{(EX_1)} = \frac{(EX)-(EF)}{(EF)-(EX_1)}$$

173. Une première conséquence de la définition précédente est qu'*une division harmonique n'est point modifiée par la projection.* En d'autres termes, si deux lignées de quatre points chacune sont projectives, et si l'une d'elles forme une division harmonique, il en sera de même de l'autre, puisque leurs biquotients analogues sont égaux.

174. L'égalité (30) montre que

(*) De l'égalité (33) on déduit (34) en prenant l'origine K en J; de la même égalité on déduit encore (35) et (36) en supposant que le point K coïncide avec E.

Si les points X, X_1 *divisent harmoniquement la longueur* (EF), *les points* E, F *diviseront harmoniquement la longueur* (XX_1).

Les deux premiers points sont dits *conjugués harmoniques par rapport aux deux autres* E, F; ces derniers sont donc également conjugués harmoniques par rapport à X, X_1.

175. *Une division harmonique n'est pas détruite par la permutation de deux points conjugués;* car si, par exemple, $(EXX_1F) = -1$, le biquotient (EX_1XF) aura la même valeur en vertu de l'égalité (31).

176. Réciproquement, *si la valeur d'un biquotient de quatre points distincts n'est pas modifiée par la permutation de deux lettres, les quatre points formeront une division harmonique.*

En effet, soit $(EXX_1F) = (EX_1XF)$; on en conclut que les points E, X, X_1, F forment une involution, dont les points non permutés sont les éléments doubles (v. 164). Donc X, X_1 sont conjugués harmoniques par rapport à E, F (v. 166).

177. *Dans toute division harmonique deux points conjugués partagent le segment des deux autres en parties proportionnelles, abstraction faite des signes, et réciproquement.*

Cette propriété résulte de l'égalité (32), qui est équivalente à (29). Les signes des deux membres de (32) étant contraires, il faut que l'un des points X soit à l'intérieur du segment (EF) et l'autre point X_1 à l'extérieur; en d'autres termes, les paires de points conjugués se séparent.

178. L'égalité (34) nous apprend que

Lorsque quatre points sont harmoniqnes, le rectangle des distances de deux points conjugués au point milieu des deux autres est équivalent au carré construit sur la demi-distance de ces derniers, et réciproquement.

179. L'égalité (35) peut se traduire ainsi :

Lorsque quatre points forment une division harmonique, la valeur réciproque de la distance d'un point à son conjugué est la moyenne arithmétique des valeurs réciproques des distances du premier point aux deux autres, et réciproquement.

La longueur (EF) est appelée pour cette raison la *moyenne harmonique* des distances (EX), (EX_1).

180. Enfin l'égalité (36) donne naissance au théorème suivant :

Si quatre points E, X, F, X_1 *sont conjugués harmoniques, et si l'on prend pour origine le premier point* E, *les trois segments* (EX), (EF), (EX_1) *satisferont à la proportion*

1er segment : 3e = (1er—2e) : (2e—3e)

et réciproquement *.

181. Supposons que les deux points E, F soient fixes; et voyons de quelle manière varie le point X_1, quand son conjugué X parcourt la droite EF. Si le point X_1 est à l'infini en J_1, le rapport $\frac{(EX_1)}{(X_1F)}$ a pour valeur —1, donc $\frac{(EX)}{(XF)}$ doit être

B₁ F B J A E A₁

égal à +1 ; en d'autres termes, le point conjugué se trouvera

(*) Si l'on fait vibrer simultanément trois cordes de même nature et dont les longueurs sont proportionnelles aux nombres 1, 4/5, 2/3, on produit l'accord parfait majeur (ut, mi, sol). Les vibrations des trois cordes recommencent ensemble après quatre vibrations de la première; c'est la combinaison la plus harmonieuse, parce que sa période est la plus courte et ses rapports les plus simples.

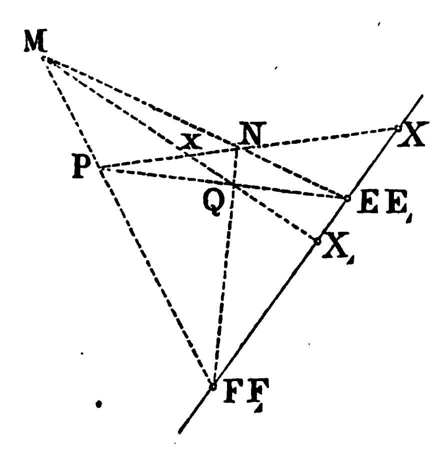
La proportion ci-dessus étant satisfaite par les longueurs des trois cordes, a reçu des anciens le nom de proportion harmonique. Si ces longueurs sont portées sur une droite à partir d'un point et dans le même sens, les quatre extrémités formeront une division harmonique.

nécessairement au milieu de (EF), en J. A mesure que X_1 se meut vers l'un des points doubles E, le correspondant X s'en rapproche également, et quand X_1 coïncide avec l'un des points doubles E, le point X doit également coïncider avec lui. De même, si X_1 décrit le segment (EJ), le correspondant X parcourra la portion infinie (EJ_1) qui ne comprend pas le point double F. De là résultent les propriétés suivantes :

Dans toute division harmonique, si l'un des points est à l'infini, le conjugué doit être au milieu des deux autres ; et si deux points coïncident, un troisième point doit également coïncider avec eux; enfin deux points conjugués sont situés d'un même côté par rapport au point milieu des deux autres.

182. *Etant donnés trois points* E, F, X_1, *en construire un quatrième* X *qui soit conjugué harmonique de l'un d'eux* X_1 *par rapport aux autres.*

Prenez deux points M, Q en ligne droite avec X_1 et joignez par des droites chacun de ces points avec E, F. La se-



conde transversale NP du quadrilatère formé passe par le point cherché X.

Cette construction se déduit de celle que nous avons indiquée pour l'involution (v. 157), en supposant que les paires données soient les points doubles E, F. On sait, d'autre part (v. 166), que deux points conjugués partagent harmoniquement le segment des points doubles.

183. Le polygone complet de quatre sommets M, N, P, Q est composé de trois paires de droites qui se coupent encore en trois points E, F, x : ces derniers sont appelés *points diagonaux*, et les droites EF, Ex, Fx sont les *diagonales* du polygone. La propriété précédente peut, grâce à ces définitions, s'énoncer ainsi :

Toute diagonale EF *d'un polygone complet de quatre sommets* M, N, P, Q *est coupée par les côtés du polygone en quatre points* E, F, X, X_1, *qui forment une division harmonique.*

Faisceaux projectifs en involution.

Définition. — 184. *Deux faisceaux projectifs superposés (c'est-à-dire situés dans un même plan et autour d'un même point) sont en involution ou forment une involution de droites, lorsqu'un des rayons, considéré successivement comme appartenant à l'un puis à l'autre des deux faisceaux, a dans chacun des deux cas le même rayon pour correspondant.*

Éléments conjugués. — 185. Si l'on coupe par une transversale deux faisceaux projectifs en involution, les lignées des intersections seront involutoires, puisque les intersections de la transversale avec les deux rayons susceptibles de permutation pourront également être permutées l'une avec l'autre. Les deux faisceaux étant perspectifs avec les deux lignées, il

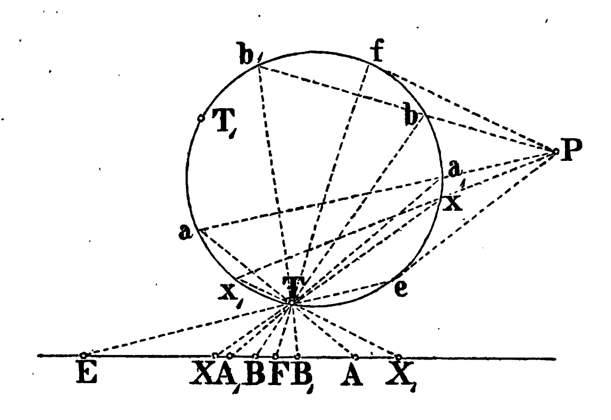
en résulte que les rayons menés par les points correspondants se correspondront aussi. Or, dans les lignées, deux éléments correspondants quelconques peuvent être permutés ; il en sera, par conséquent, de même des faisceaux. Donc

Lorsque deux faisceaux sont en involution, tout rayon, considéré comme appartenant à l'un puis à l'autre des deux faisceaux, doit avoir dans chacun des deux cas le même rayon pour correspondant.

Deux rayons qui se correspondent s'appellent, en conséquence, *rayons conjugués.*

186. Si une involution de droites est déterminée par deux paires de rayons conjugués a, a_1, b, b_1, le rayon x correspondant au rayon donné x_1 peut s'obtenir de la manière suivante :

On mène une transversale qui coupera les droites données



en une involution de points A, A_1, B, B_1, X ; on construit ensuite le point X conjugué à X_1. Le rayon qui passe par le point X est l'élément cherché.

ÉLÉMENTS DOUBLES. — 187. Dans l'involution de points formée sur une transversale à deux faisceaux involutoires se trouvent toujours deux éléments doubles E, F, qui peuvent être réels ou imaginaires. Les rayons qui passent par ces points sont également des rayons doubles. La construction de ces derniers se ramène donc à la recherche des points doubles de deux lignées involutoires (v. 160); cependant, elle sera simplifiée si l'on projette les points de la transversale depuis le sommet T des faisceaux superposés.

Donc pour construire les rayons doubles d'une involution de droites TA, TA_1, TB, TB_1,.. *on décrit par le sommet* T *une circonférence, qui coupe les rayons respectivement en* a, a_1, b, b_1,.. *Les droites* aa_1, bb_1,... *concourent en un point* P; *et les intersections* (ab, a_1b_1), (ab_1, a_1b),... *sont sur une droite p. Les rayons* TE, TF *qui passent par les contacts* e, f *des tangentes menées du point* P *ou par les extrémités de la corde p, sont les rayons doubles de l'involution. Ces éléments doubles sont réels, quand les paires de rayons conjugués ne se séparent pas; ils sont, en revanche, imaginaires, quand les paires se séparent.*

ÉLÉMENTS RECTANGULAIRES. — 188. Les deux rayons menés par les extrémités du diamètre dont le prolongement contient le point P (voyez la figure précédente), sont conjugués et font entre eux un angle droit. Ces deux rayons sont toujours réels, quelle que soit la nature de l'involution; ce sont du reste les rayons limites i, j, i_1, j_1, qui coïncident inversement.

Le diamètre qui passe par le point P partage en deux parties égales les arcs compris entre les contacts; on en conclut que les rayons j, j_1 sont les bissectrices des angles formés par les rayons doubles TE, TF. Donc

Dans deux faisceaux projectifs en involution, il y a toujours une paire de rayons conjugués j, j_1, qui se coupent à angle droit; ces rayons sont les bissectrices des angles formés par les éléments doubles.

INVOLUTION RECTANGULAIRE. — 189. Il peut arriver que le point P, où se coupent toutes les droites aa_1, bb_1,... menées par les intersections des rayons conjugués avec la circonférence, se trouve lui-même au centre du cercle. Ce cas se présente, quand les cordes aa_1, bb_1 sont des diamètres, c'est-à-dire quand les rayons conjugués TA, TA_1 sont rectangulaires, ainsi que TB, TB_1. Mais alors toutes les droites xx_1,... devant passer par le centre P, il en résulte que deux rayons conjugués quelconques se coupent à angle droit. C'est là ce qu'on appelle une *involution rectangulaire.* Donc

Lorsque dans une involution de droites deux rayons sont perpendiculaires à leurs conjugués, il en est de même de tous les autres.

190. Réciproquement, *deux faisceaux* T *qui peuvent être engendrés par les deux côtés d'un angle droit tournant dans un plan, forment une involution rectangulaire.*

En effet, soient TA, TA_1 une position de l'angle droit et TB, TB_1 une autre. Ces deux paires de rayons déterminent une involution, qui doit être rectangulaire en vertu du dernier théorème et qui est conséquemment identique avec les deux faisceaux T.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES. — 191. Des démonstrations analogues à celles que nous avons données pour les lignées involutoires nous permettent d'énoncer les propriétés suivantes :

Dans une involution de droites le produit des tangentes des angles que forment deux rayons conjugués quelconques avec l'un

des rayons j, j_1 de la paire rectangulaire est constant (v. 161).

192. Réciproquement, *deux faisceaux superposés dont les rayons se correspondent un à un, sont involutoires, quand le produit des tangentes des angles formés par deux rayons correspondants quelconques avec un rayon fixe est constant* (v. 162).

193. *Dans une involution de droites tout biquotient de quatre rayons quelconques est égal au biquotient analogue des rayons conjugués* (v. 163).

194. Réciproquement, *si trois paires de droites situées dans un plan autour d'un point sont telles qu'un biquotient d'un rayon de chaque paire et d'un quatrième rayon soit égal au biquotient analogue des éléments correspondants, les trois paires de droites seront en involution* (v. 164).

195. *Lorsque trois paires de droites a, a_1, b, b_1, c, c_1 situées dans un plan autour d'un point sont en involution, il existe entre ces droites les égalités suivantes :*

$$\frac{\mathrm{Sin}(ab).\mathrm{Sin}(ab_1)}{\mathrm{Sin}(ac).\mathrm{Sin}(ac_1)} = \frac{\mathrm{Sin}(a_1b).\mathrm{Sin}(a_1b_1)}{\mathrm{Sin}(ac).\mathrm{Sin}(a_1c_1)}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}(bc).\mathrm{Sin}(bc_1)}{\mathrm{Sin}(ba).\mathrm{Sin}(ba_1)} = \frac{\mathrm{Sin}(b_1c).\mathrm{Sin}(b_1c_1)}{\mathrm{Sin}(b_1a).\mathrm{Sin}(b_1a_1)}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}(ca).\mathrm{Sin}(ca_1)}{\mathrm{Sin}(cb).\mathrm{Sin}(cb_1)} = \frac{\mathrm{Sin}(c_1a).\mathrm{Sin}(c_1a_1)}{\mathrm{Sin}(c_1b).\mathrm{Sin}(c_1b_1)}$$

$$\mathrm{Sin}(ab_1).\mathrm{Sin}(bc_1).\mathrm{Sin}(ca_1) = -\mathrm{Sin}(a_1b).\mathrm{Sin}(b_1c).\mathrm{Sin}(c_1a)$$

$$\mathrm{Sin}(ab_1).\mathrm{Sin}(bc).\mathrm{Sin}(c_1a_1) = -\mathrm{Sin}(a_1b).\mathrm{Sin}(b_1c_1).\mathrm{Sin}(ca)$$

$$\mathrm{Sin}(ab).\mathrm{Sin}(b_1c_1).\mathrm{Sin}(ca_1) = -\mathrm{Sin}(a_1b_1).\mathrm{Sin}(bc).\mathrm{Sin}(c_1a)$$

$$\mathrm{Sin}(ab).\mathrm{Sin}(b_1c).\mathrm{Sin}(c_1a_1) = -\mathrm{Sin}(a_1b_1).\mathrm{Sin}(bc_1).\mathrm{Sin}(ca)$$

et réciproquement l'une quelconque de ces égalités exprime l'involution des six droites (v. 165).

196. *Dans deux faisceaux en involution le rapport de double section des rayons doubles par deux rayons correspon-*

dants quelconques est égal à —1, en d'autres termes, *l'angle des rayons doubles est partagé harmoniquement par deux rayons quelconques correspondants* (v. 166).

197. Réciproquement, *deux faisceaux superposés, dont les rayons se correspondent un à un, seront en involution, lorsqu'un angle (ef) est divisé harmoniquement par toutes les paires de rayons correspondants* (v. 167).

EQUATION. — 198. Si l'on représente par x, x_1 les tangentes des angles que forment deux rayons conjugués chacun avec un rayon quelconque, on démontrera comme pour les lignées involutoires qu'il existe entre x et x_1 une relation de la forme

$$mxx_1 + n(x + x_1) + q = 0$$

et que si l'on prend pour origine l'un des rayons j, j_1 de la paire rectangulaire, l'équation devient

$$mxx_1 + q = 0$$

199. Les propositions réciproques sont également vraies.

DIVISION HARMONIQUE AUTOUR D'UN POINT. — 200. Quatre droites e, f, x, x_1 d'un faisceau T forment une division harmonique, lorsque le rapport de double section de l'angle (ef) par les rayons x, x_1 est égal à —1, c'est-à-dire, lorsque

$$\frac{\text{Sin}(ex)}{\text{Sin}(xf)} : \frac{\text{Sin}(ex_1)}{\text{Sin}(x_1f)} = -1$$

Cette égalité est équivalente avec les sept suivantes :

$$\frac{\text{Sin}(xe)}{\text{Sin}(ex_1)} : \frac{\text{Sin}(xf)}{\text{Sin}(fx_1)} = -1$$

$$\frac{\text{Sin}(ex_1)}{\text{Sin}(x_1f)} : \frac{\text{Sin}(ex)}{\text{Sin}(xf)} = -1$$

$$\frac{\text{Sin}(ex)}{\text{Sin}(xf)} = -\frac{\text{Sin}(ex_1)}{\text{Sin}(x_1f)}$$

$$\frac{-\text{Tang}(ke)+\text{Tang}(kx)}{-\text{Tang}(kx)+\text{Tang}(kf)} : \frac{-\text{Tang}(ke)+\text{Tang}(kx_1)}{-\text{Tang}(kx_1)+\text{Tang}(kf)} = -1$$

où k est un rayon quelconque du faisceau T (v. 86).

$$\text{Tang}(xj).\text{Tang}(x_1j) = \text{Tang}^2(ej)$$

où j est l'une des bissectrices des angles formés par les rayons e, f.

$$\frac{1}{\text{Tang}(ex)} + \frac{1}{\text{Tang}(ex_1)} = \frac{2}{\text{Tang}(ef)}$$

$$\frac{\text{Tang}(ex)}{\text{Tang}(ex_1)} = \frac{\text{Tang}(ex)-\text{Tang}(ef)}{\text{Tang}(ef)-\text{Tang}(ex_1)}$$

201. Si donc les rayons x, x_1 divisent harmoniquement l'angle (ef), les rayons e, f diviseront harmoniquement l'angle (xx_1). Les droites x, x_1 sont dites *conjuguées harmoniques par rapport aux deux autres* e, f et ces dernières sont également conjuguées harmoniques par rapport à x, x_1. Il est évident qu'une division harmonique de droites n'est point détruite par la projection, et qu'elle forme également une division harmonique de points sur une transversale quelconque, puisque les biquotients analogues sont égaux. Réciproquement, si l'on joint par des droites quatre points harmoniques avec un point quelconque, le faisceau obtenu forme une division harmonique. Cette propriété permet de construire le quatrième rayon d'un faisceau harmonique.

202. *Lorsque la valeur d'un biquotient de quatre rayons n'est pas modifiée par la permutation de deux lettres, les quatre rayons doivent former une division harmonique* (v. 176).

203, *Deux droites* e, f *et les bissectrices* x, x_1 *de leurs angles forment une division harmonique,* en vertu des définitions.

204. Réciproquement, *quand deux droites rectangulaires*

sont conjuguées harmoniques par rapport à deux autres, elles sont bissectrices des angles formés par ces dernières.

En effet, nous avons vu que dans deux faisceaux involutoires il existe une seule paire de rayons conjugués perpendiculaires l'un à l'autre, quand les élémenis doubles sont réels. Or, ces droites rectangulaires partagent harmoniquement les rayons doubles et en sont les bissectrices (v. 190).

205. Quatre droites MN, NQ, QP, PM situées dans un plan (v. la fig. du § 182), constituent un *polygone complet de quatre côtés,* lequel a six sommets M, N, P, Q, E, F, trois diagonales EF, Ex, Fx et trois points diagonaux X, X_1 x. Ces derniers jouissent de la propriété suivante :

Si dans un polygone complet de quatre côtés MN, NQ, QP, PM, *l'on joint par des droites un point diagonal* x *avec les six sommets* M, N, P, Q, E, F, *on obtient un faisceau harmonique de quatre rayons.*

En effet, le faisceau xE, xF, xX_1, xX est coupé par la droite EF en quatre points harmoniques (v. 183).

Feuillées projectives en involution.

206. Tout ce que nous venons de dire à l'occasion des faisceaux involutoires s'applique également aux feuillées en involution avec les seules modifications nécessitées par la nature différente des systèmes primaires.

Résumé.

207. Nous avons montré précédemment (v. 90) que deux lignées sont projectives, quand leurs points se correspondent un à un et ne sont point unis par une relation de nature transcendante. Après avoir construit trois paires de points

correspondants conformément aux données de la question, nous pourrons avec la règle obtenir dans une des lignées le point qui correspond à un point connu de l'autre (v. 78).

Si les deux lignées projectives sont superposées, il faudra construire également trois paires de points correspondants, ce qui permettra d'obtenir une quatrième paire quelconque avec la règle (v. 78) et de déterminer en outre les points doubles au moyen d'un cercle (v. 160).

Enfin, deux lignées superposées forment une involution, lorsqu'elles sont projectives et qu'un point, considéré successivement comme appartenant à l'une puis à l'autre des deux lignées, a chaque fois le même point pour correspondant. Dans ce cas, il suffira de posséder seulement deux paires d'éléments correspondants pour pouvoir construire le point qui correspond à un point donné (v. 157), ainsi que les deux points doubles (v. 160).

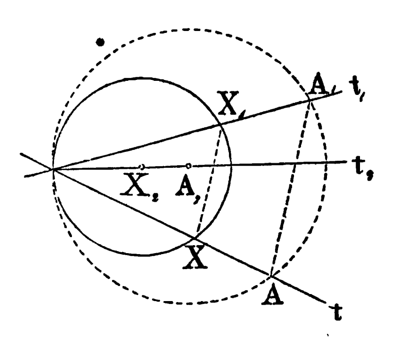
Si l'une des lignées ou toutes les deux sont remplacées par un autre système primaire (faisceau ou feuillée), nous pourrons couper ce dernier par une droite transversale, et la question se ramènera à l'un des cas précédents.

Cette manière d'envisager les relations de deux systèmes primaires projectifs permet de résoudre un grand nombre de problèmes d'après une méthode simple et uniforme. Nous allons en donner quelques exemples.

208. *Etant données trois droites fixes t, t_1, t_2 d'un faisceau, si l'on trace un cercle variable dont la circonférence passe par le sommet du faisceau, et dont le centre X_2 se meut sur t_2, les cordes X_1 X menées par les secondes intersections avec t_1, t seront parallèles.*

A chaque point X_1 de t_1 correspond un seul point X sur

t et vice-versâ; de plus, les équations du cercle variable, et des droites t_1, t sont algébriques, et par suite la relation entre X_1 et X n'est pas de nature transcendante; donc les



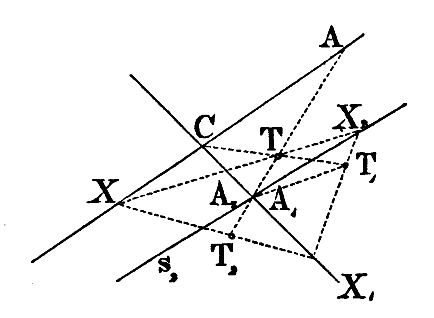
deux lignées t_1, t sont projectives. En outre, au point infini de t_1 correspond le point infini de t; donc les lignées t_1, t sont semblables. Enfin, le sommet du faisceau représente deux points correspondants; donc les lignées t_1, t sont en perspective, et comme le centre de perspective est situé sur la droite infinie I_1I, il doit être lui-même à l'infini; en d'autres termes, les cordes X_1X sont parallèles.

209. *Si une droite x se meut de telle manière qu'elle forme avec deux rayons fixes t, t_1 d'un faisceau* C *un triangle* XCX_1 *de grandeur constante, les lignées des intersections* X, X_1 *seront projectives.*

A chaque point X de t correspond un seul point X_1 sur t_1 et vice-versâ; de plus, les relations ne sont pas de nature transcendante; donc les lignées t, t_1 sont projectives. On peut aussi le démontrer, en exprimant que la surface double du triangle formé, c'est-à-dire $(CX)(CX_1).\text{Sin}(tt_1)$, a une valeur constante (v. 101).

210. *Etant donnés dans un plan un angle* XCX_1 *et deux points fixes* T, T_1 *en ligne droite avec son sommet* C, *si autour d'un point fixe* T_2 *on fait tourner une transversale, qui rencontre les côtés de l'angle en* X *et* X_1, *le point de concours* X_2 *des deux droites* TX, T_1X_1 *décrira une droite* s_2.

En effet, les faisceaux T, T_1 sont en situation de perspective, puisqu'ils sont respectivement projectifs avec deux



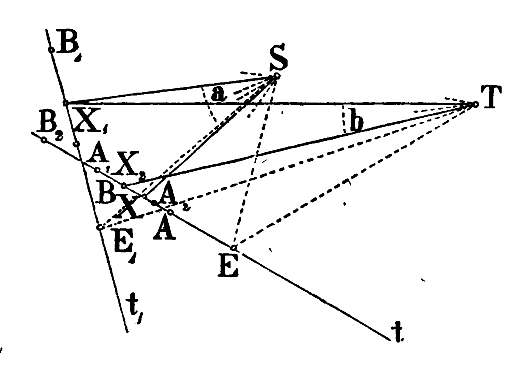
lignées projectives CX, CX_1, et qu'en outre les rayons superposés TC, T_1C se correspondent.

211. *Etant donnés deux points* S, T *et deux droites* t, t_1, *on demande de trouver sur ces droites deux points* E, E_1 *tels que le segment* (EE_1) *soit vu des points* T, S *sous des angles donnés* a, b.

Prenez sur t_1 un point X_1 et menez par S et par T deux droites SX, TX_2 qui fassent respectivement avec X_1S, X_1T des angles X_1SX, X_1TX_2 égaux à a et à b; soient X, X_2 les intersections avec t.

Si X_1 parcourt la droite t_1, les points X et X_2 décriront la droite t. La lignée des points X_1 est projective avec chacune

des deux lignées X et X_2 (v. 90); donc ces deux dernières sont projectives entre elles et leurs points doubles E, F avec



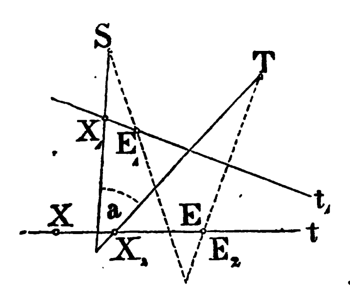
les correspondants E_1, F_1 satisfont évidemment à la condition posée.

Pour résoudre ce problème, il suffira, par conséquent, de prendre sur t_1 trois points quelconques X_1, A_1, B_1, de chercher leurs correspondants X, X_2, A, A_2, B, B_2 sur t (en ayant soin que les angles X_1SX, A_1SA,... soient égaux et de même signe, ainsi que les angles X_1TX_2, A_1TA_2,...); puis, on construira les points doubles des deux lignées formées sur t_2.

En d'autres termes, la méthode suivie comprend deux opérations distinctes. En premier lieu, elle nécessite trois constructions d'essai; car quand on a choisi arbitrairement le point X_1 pour l'un des points demandés, on examine si, en menant conformément à l'hypothèse SX, TX_2, les autres conditions sont remplies : la distance (XX_2) exprime l'erreur commise. Au moyen de trois erreurs semblables (XX_2), (AA_2), (BB_2), il faut, en dernier lieu, rechercher les éléments (points doubles) pour lesquels l'erreur est nulle.

212. *Etant donnés deux points* S, T *et deux lignées projectives* t, t_1, *on demande de trouver sur ces dernières deux points correspondants* E, E_1 *tels que les droites* SE, TE_1 *se coupent sous un angle donné* a.

Prenez sur t_1 un point quelconque X_1, et menez par T une droite TX_2 qui fasse avec SX un angle égal à l'angle donné a; soit X_2 l'intersection des droites t, TX_2. Si X_2 coïncide avec X, le problème sera résolu; sinon, répétez cette construction d'essai pour deux autres points A_1, B_1 et vous obtiendrez



ainsi sur t deux lignées X, X_2, A, A_2, B, B_2. La lignée X_2 est projective avec la lignée X_1, puisque à chaque point de l'une correspond un seul point de l'autre, et que les points X_1, X_2 sont liés par des équations de nature algébrique; donc, en vertu de l'hypothèse, les deux lignées X, X_2 sont projectives. Les points doubles E, F donnent avec les points correspondants E_1, F_1 deux solutions du problème.

213. Les deux problèmes précédents donnent naissance à un grand nombre de cas particuliers, entre autres aux suivants :

Placer entre deux droites t, t_1 *une corde* EE_1 *passant par un*

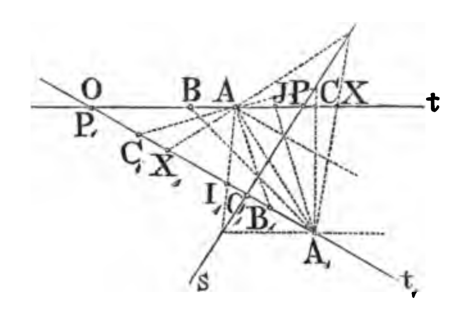
point S *et qui soit vue d'un autre point* T *sous un angle donné* b (probl. 211 en donnant a = 0).

Etant données deux droites t, t_1, mener à t une perpendiculaire EE_1 *telle que la partie comprise entre t et t_1 soit vue d'un point* T *sous un angle* b. (probl. 211 en supposant S à l'extrémité infinie d'une droite perpendiculaire sur t et a = 0).

Déterminer sur une droite t un segment (EE_1) *qui soit vu de deux points* S, T *sous des angles donnés* a, b. (probl. 212, en admettant que t_1 coïncide avec t.)

214. *Etant données dans un plan deux lignées projectives t, t_1, si l'on joint par des droites un point quelconque* T *de l'axe projectif* s *avec les différents points des deux lignées, on obtient une involution de droites.*

En effet, le faisceau TA_1, TB_1,... est projectif avec le



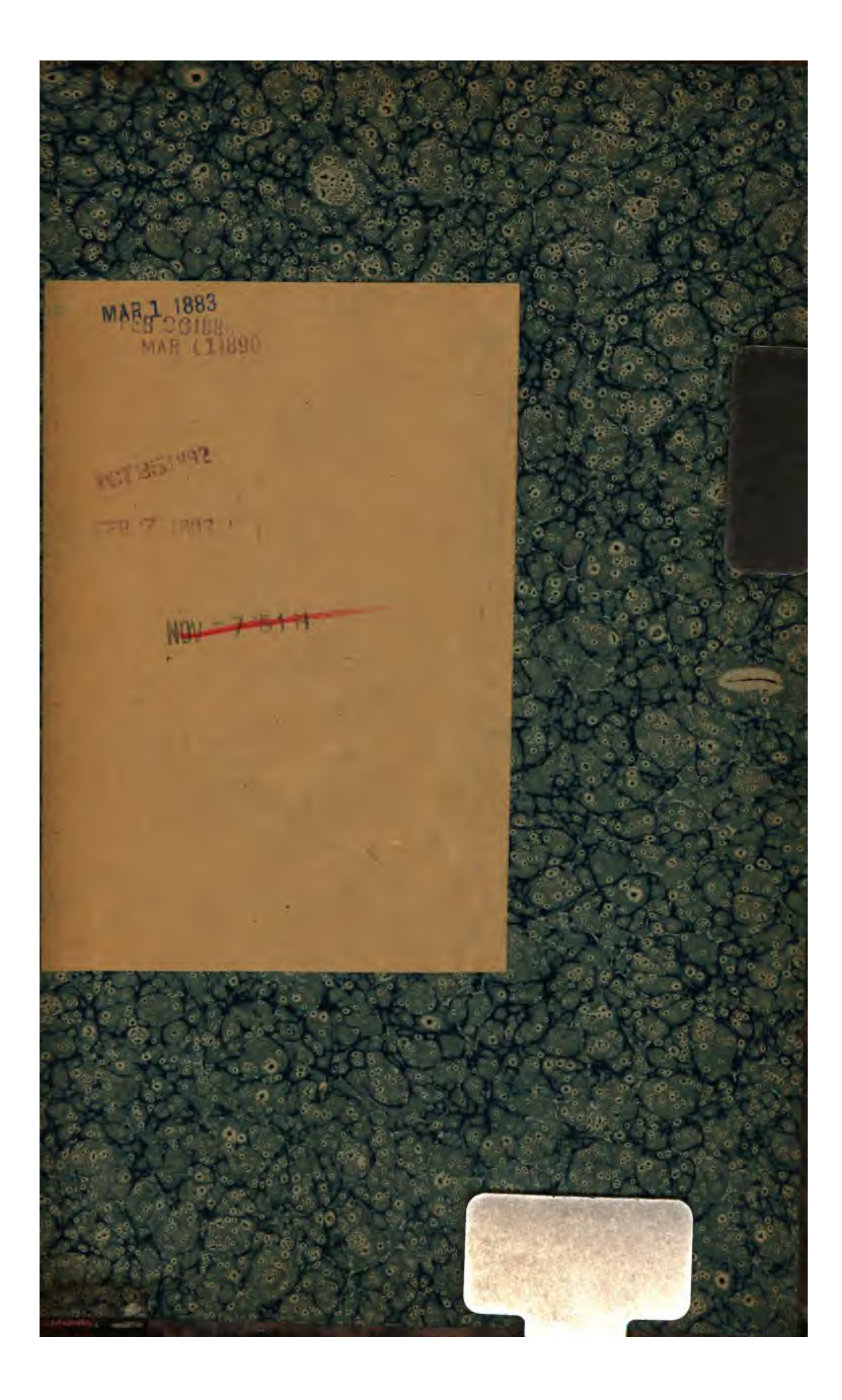
faisceau TA, TB,... De plus, le rayon TO ou TP_1 mené par l'intersection des deux droites t, t_1 a pour correspondant le même rayon TO_1, TP, quand il est considéré successivement comme appartenant au premier faisceau, puis au second. Donc il y a involution.

215. *Etant donnés dans un plan deux faisceaux projectifs, leurs intersections avec une droite passant par le centre projectif forment une involution de points.*

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.




MAR 1 1883


Math 5158.73.2
Geometrie de position;
Cabot Science 003334668
3 2044 091 904 201